5. BÖLÜM
OPTİMİZASYON

OPTİMİZASYON KAVRAMI

Az miktarda kaynaklarla sınırsız ihtiyaçların karşılanması durumların çözümüyle ilgilenen iktisat bilimi temelde ekonomik birimlerin (bireyler, firmalar, hükümetler vs. gibi) karar alma ya da seçim yapma süreçlerini inceler. Seçim yapma problemiyle karşı karşıya olan ekonomik birimlerin "Homo Economicus" diğer bir ifadeyle rasyonel davrandıkları varsayımı yapılmaktadır. Bu bağlamda rasyonel davranan bu ekonomik birimlerin, diğer koşullar sabitken (ceteris paribus), kendisi için en iyi olanı yapmaya çalıştığı varsayılır. Bu varsayım en basit anlamı ile optimizasyon olarak tanımlanabilir. Matematiksel olarak ise bağımsız değişken ve bağımlı değişken arasındaki ilişkiyi ifade eden fonksiyonun birinci türevini sıfır yapan nokta ya da noktalar optimal (maksimum ya da minimum) değerler olarak ifade edilir. Bu optimal noktayı bulma yöntemine de optimizasyon adı verilir.

Ekonomi teorisi genellikle ekonomik değişkenler arasındaki ilişkileri ve bu ilişkiler sonucunda ulaşılmak istenen sonuçları iktisadi modellerle açıklamaya çalışır.

Her iktisadi model belirli bir amaç doğrultusunda ulaşılmak istenen sonuçların optimum yapılması veya denge durumlarıyla ilgilenir. Dolayısıyla, "Bir firmanın kârını maksimum yapabilmek veya maliyetini minimum yapabilmesi için üretim miktarı ne olmalıdır?", "Bir bireyin faydasını maksimum yapan veya harcamasını minimum yapan tüketim miktarları ne olmalıdır?", "Hükümetler ekonomik büyümeyi maksimum yapmak için ne tür programlar uygulamalıdır?", "Bir ülkenin tasarruf, tüketim, yatırım, faiz, enflasyon vb. ekonomik değişkenlerinin optimal düzeyi ne olmalıdır" gibi sorunları çözmek için izlediği yöntemlerin her biri optimal seçimdir.

Optimizasyon, kısıtlı ve kısıtsız olmak üzere iki biçimde elde edilir. Bu ünitede kısıtsız optimizasyon kavramı tanıtılacak ve amacı doğrultusunda karar alan ekonomik birimlerin (kısıtsız) optimum seçimleri tek değişken ve çok değişken durumunda incelenecektir.

TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA KISITSIZ OPTİMİZASYON

Tek değişkenli fonksiyonlarda optimal (maksimum, minimum) değerleri bulma iktisadi uygulamalarda nasıl olacaktır? Hem mikro hem makro ekonomide tüketim, tasarruf, fayda, millî gelir, toplam hasıla, toplam maliyet, talep, arz, para talebi, para arzı gibi çok sayıda iktisadi fonksiyon kullanılmaktadır. İktisadi fonksiyonların hemen hemen hepsinde ekonomik birimlerin amacı doğrultusunda istenilen sonuca ulaşmak için optimizasyon kavramı kullanılabilir. Bu ünitede basitlik sağlamak amacıyla bunlardan sadece kâr fonksiyonu konu anlatımı çerçevesinde ele alınacaktır. Bir firmanın kâr fonksiyonunun optimal değerleri belirlenmeden önce firmanın amacının belirlenmesi gereklidir. İktisadi açıdan her firmanın amacı kârını maksimum kılmaktır. Buna göre tek bir ürün üreten firmanın kâr fonksiyonu;

$$\pi(Q) = T_R(Q) - T_C(Q)$$

şeklinde ifade edilebilir. Yukarıdaki denklemde sırasıyla (T_R) toplam hasılayı, (T_C) toplam maliyeti, (Q) ise üretim miktarını temsil etmektedir. Firmanın kârını maksimum yapan üretim düzeyini bulabilmek için öncelikle kâr fonksiyonunun birinci türevini sıfır yapan üretim miktarını bulmamız gereklidir. Kâr fonksiyonunun birinci türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = \frac{dT_R(Q)}{dQ} - \frac{dT_C(Q)}{dQ} = 0$$

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = M_R(Q) - M_C(Q) = 0$$

$$M_R(Q) = M_C(Q)$$

sonucu bulunur. Buna göre firmanın marjinal hasılasını $M_R(Q)$ marjinal maliyetine $M_C(Q)$ eşitleyen üretim miktarı kâr fonksiyonun birinci türevini sıfır yapar (Tüm piyasa koşullarında kâr maksimizasyonu koşulu $M_R(Q) = M_C(Q)$ dir. Ancak, tam rekabet piyasasının varsayımlarının sonucunda firmaların fiyatı veri kabul etmeleri, firmanın marjinal hasılasının fiyata eşit olmasını garanti eder. Yani, $M_R(Q) = P$ dir. Bu nedenle sadece tam rekabet piyasasında kâr maksimizasyon şartı; $P = M_C(Q)$ şeklindedir.). Burada şunu anlıyoruz ki iktisadi bir kural olarak algıladığımız $M_R(Q) = M_C(Q)$ eşitliği, aslında bir matematik gereğidir. İktisadi mantık taşıyan bu kural, matematiksel düşünme mantığına dayandırılarak elde edilen iktisadi bulgulardan bir tanesidir.

Firmanın üretim miktarını sıfır yapan üretim değer ya da değerlerinin maksimum olup olmadığına karar verebilmek için ikinci türevi alınır ve birinci türevi sıfır yapan üretim değerleri ikinci türevde yerine konur.

$$\frac{d^2\pi(Q^*)}{dQ^2} = \frac{d^2T_R(Q^*)}{dQ^2} - \frac{d^2TC(Q^*)}{dQ^2} = 0$$

Eğer yukarıdaki kâr fonksiyonunun ikinci türev değeri negatif bir sonuç veriyor ise birinci türev kuralı ile elde edilen kritik nokta ya da noktaların firmanın kârını maksimum yaptığı söylenir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım.

Örnek: Bir firmanın toplam hasıla fonksiyonu $T_R(Q) = 12Q - 2Q^2$ ve toplam maliyet fonksiyonu $T_C(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 5Q^2 + 17Q + 25$ olduğuna göre firmanın kârını maksimum yapan üretim düzeyini bulunuz.

Çözüm: Firmanın kâr fonksiyonu;

$$p(Q) = T_R(Q) - T_C(Q)$$
$$= 12Q - 2Q^2 - \left(\frac{1}{3}Q^3 - 5Q^2 + 17Q + 25\right)$$

şeklindedir. İlk olarak firmanın kârını maksimum yapan değerleri bulabilmek için kâr fonksiyonun birinci türevini sıfır yapan noktaları belirleyelim. Buna göre;

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = 12 - 4Q - Q^2 + 10Q - 17 = 0$$
$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = -Q^2 + 6Q - 5 = 0$$
$$(Q-5)(Q-1) = 0$$

sonucu elde edilir. Yukarıdaki denklemin kökleri bulunarak birinci türevi sıfır yapan üretim değeri ya da değerleri elde edilir. $Q_1 = 5$ ve $Q_2 = 1$ üretim değerlerinin hangisinin firmanın kârını maksimum yapıp yapmadığına karar verebilmek için ikinci türev şartlarına bakılır.

$$\frac{d^2\pi(Q)}{dQ^2} = -2Q + 6$$
$$\left.\frac{d^2\pi(Q)}{dQ^2}\right|_{Q=5} = -2 \cdot 5 + 6 = -4 < 0$$
$$\left.\frac{d^2\pi(Q)}{dQ^2}\right|_{Q=1} = -2 \cdot 1 + 6 = 4 > 0$$

Yukarıda görüldüğü gibi iki farklı üretim düzeyinden bir tanesi $Q_1 = 5$ kâr fonksiyonunun ikinci türevinde değerlendirildiğinde negatif; bir diğer üretim değeri $Q_2 = 1$ ise ikinci türevde pozitif bir sonuç vermektedir. Daha önce belirttiğimiz gibi, bu iki kritik değerden kârı maksimum kılan ikinci türevi negatif yapan değerdir.

Bu durumda kârını maksimum yapmak isteyen bir firmanın 5 birimlik üretim yapması gereklidir sonucu çıkarılabilir.

Örnek: $R(t) = tQ$ vergi geliri fonksiyonu ve satış miktarı $Q = a - bt$ şeklinde verilmişse devletin vergi gelirlerini maksimum yapan vergi oranı ne olmalıdır?

Çözüm: $R(t) = tQ = t(a - bt) = at - bt^2$

$$R'(t) = a - 2bt = 0$$

$$t = \frac{a}{2b}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA KISITSIZ OPTİMİZASYON

İktisadi problemlerde, fonksiyonlar genellikle çok değişkenlidir ve ekonomik birimlerin hedefleri çok sayıda değişkene bağlıdır. Örneğin, bir bireyin faydası, tüketmiş olduğu her malın miktarına bağlıdır. Bir firmanın üretim fonksiyonu, üretim sürecinde kullanmış olduğu emek, sermaye ve hammadde miktarı gibi birçok faktöre bağlıdır. Buna göre, n sayıda bağımsız değişkenden oluşan z fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Tek bir ürün üreten firmanın amaç fonksiyonuna bağlı olarak kâr fonksiyonunun optimal değerlerini elde etmiştik. Bu bölümde iki ve üç değişkenli fonksiyonlarda optimal (yerel maksimum ve yerel minimum) noktaların nasıl bulunacağı verildikten sonra, iki ve üç ürün üreten firmanın amaç fonksiyonuna bağlı olarak kâr fonksiyonunun optimal değerleri ele alınacaktır.

İki Değişkenli Fonksiyonlarda Kısıtsız Optimizasyon

İki değişkenli fonksiyonlarda kısıtsız optimizasyonu iki mal üreten bir firmanın kâr fonksiyonunu göz önüne alıp yeniden inceleyelim. Buna göre iki mal üreten bir firmanın kâr fonksiyonu

$$\pi(Q_1, Q_2) = T_R(Q_1) + T_R(Q_2) - TC(Q_1, Q_2)$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre optimal üretim miktarlarını elde edebilmek için kâr fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevleri sıfıra eşitlenir:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = \pi_1 = 0, \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = \pi_2 = 0$$

elde edilir. Daha sonra Hessian matrisi oluşturulur ve asal minörlere bakılır

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11}(Q_1, Q_2) & \pi_{12}(Q_1, Q_2) \\ \pi_{21}(Q_1, Q_2) & \pi_{22}(Q_1, Q_2) \end{vmatrix}$$

$$|H| = [\pi_{11}(Q_1,Q_2)\pi_{22}(Q_1,Q_2) - \pi_{12}(Q_1,Q_2)]^2 > 0$$

ise firmanın ürettiği (Q_1, Q_2) malların firmanın kârını maksimum yaptığı söylenir.

Örnek: Bir firmanın kâr fonksiyonu

$$\pi(Q_1, Q_2) = 64Q_1 - 2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 - 4Q_2^2 + 32Q_2 - 14$$

olduğuna göre firmanın kârını maksimum yapan üretim düzeyini bulunuz.

Çözüm: Kâr fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevi alınır ve çözümlenirse

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = \pi_1 = 64 - 4Q_1 + 4Q_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = \pi_2 = 4Q_1 - 8Q_2 + 32 = 0$$

taraf tarafa toplanırsa

$$Q_1 = 40, Q_2 = 24$$

bulunur. Buna göre $(Q_1, Q_2) = (40, 24)$ üretim miktarlarının kârı maksimum yapan miktarlar olup olmadığına karar verebilmek için ikinci mertebeden kısmi türevler alınırsa

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}(Q_1, Q_2) = \pi_{11}(Q_1, Q_2) = \pi_{11}(40, 24) = -4$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}(Q_1, Q_2) = \pi_{22}(Q_1, Q_2) = \pi_{22}(40, 24) = -8$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_2}\left(\frac{\partial \pi}{\partial Q_1}\right) = \pi_{12}(Q_1, Q_2) = \pi_{12}(40, 24) = 4$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\frac{\partial \pi}{\partial Q_2}\right) = \pi_{21}(Q_1, Q_2) = \pi_{21}(40, 24) = 4$$

sonuçları elde edilir. Bu sonuçları kullanarak Hessian matrisi oluşturulursa

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11}(Q_1,Q_2) & \pi_{12}(Q_1,Q_2) \\ \pi_{21}(Q_1,Q_2) & \pi_{22}(Q_1,Q_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi_{11}(40,20) & \pi_{12}(40,20) \\ \pi_{21}(40,20) & \pi_{22}(40,20) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

kurgusunu elde ederiz. Son olarak, Hessian determinantını ve ikinci mertebeden kısmi türevi (40, 24) noktasında değerlendirir isek:

$$\pi_{11}(40, 24) = -4 < 0$$

sonuçları bulunur ve firmanın sırasıyla $(Q_1, Q_2) = (40, 24)$ birim üretmesi durumunda kârını maksimum yaptığı söylenir.

Örnek: K ve L sırasıyla sermaye ve emeği temsil etmek üzere toplam maliyet fonksiyonu $TC(K, L) = 160K - 3K^2 - 2KL - 2L^2 + 120L - 45$ ise firmanın maliyetini optimum yapan üretim düzeyini nasıl hesaplayabiliriz?

Önceki örneğe benzer yolla örnek çözülür.

Üç Değişkenli Fonksiyonlarda Kısıtsız Optimizasyon

Üç mal üreten bir firmanın amacına bağlı olarak kâr fonksiyonu düzenlenir ve iki değişkenli kâr fonksiyonu

$$\pi(Q_1, Q_2, Q_3) = T_R(Q_1) + T_R(Q_2) + T_R(Q_3) - TC(Q_1, Q_2, Q_3)$$

biçimine benzetebilir. Kâr fonksiyonunu maksimum kılan üretim miktarlarını tespit edebilmek için birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlere bakılır. Buna göre kâr fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevleri sıfıra eşitlenir:

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_1} = \pi_1 = 0, \frac{\partial\pi}{\partial Q_2} = \pi_2 = 0, \frac{\partial\pi}{\partial Q_3} = \pi_3 = 0$$

Yukarıdaki üç denklem eşanlı çözülerek, (Q_1, Q_2, Q_3) üretim miktarları belirlenir. Daha sonra Hessian matrisi oluşturulur ve asal minörlere bakılır:

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{vmatrix}$$

Eğer asal minörler

$$|H_1| = \pi_{11} < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$|H_3| = |H| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{vmatrix} < 0$$

ise firmanın ürettiği malların firmanın kârını maksimum kılan üretim miktarları olduğu söylenir.

Örnek: Bir firmanın kâr fonksiyonu

$$\pi(Q_1, Q_2, Q_3) = 5Q_1^2 - 2Q_2^2 + 4Q_3^2 + 10Q_1 + 4Q_2 + Q_1Q_3 + 2\,Q_2Q_3 + 50$$

şeklinde verilmiştir. Kârı maksimum kılan üretim düzeylerini bulunuz. İkinci türev koşullarını test ediniz.

Çözüm: İlk olarak kâr fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevleri sıfıra eşitlenir ve denklem sistemi çözümlenir.

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = \pi_1 = -10Q_1 + 10 + Q_3 = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = \pi_2 = -4Q_2 + 2Q_3 + 4 = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_3} = \pi_3 = Q_1 + 2Q_2 - 8Q_3 = 0$$

Yukarıdaki denklem sistemini çözümleyebilmek için A katsayılar matrisi, Q bilinmeyenler vektörü ve B sabitler vektörünü temsil etmek üzere;

$$AQ = B$$
$$\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 \\ -4 \\ 0 \end{vmatrix}$$

şeklinde yeniden düzenlenir ve Cramer kuralı kullanılırsa birinci mertebeden kısmi türevini sıfır yapan değerler aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$Q_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-288}{-276} \cong 1{,}04$$

$$Q_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -10 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-336}{-276} \cong 1{,}22$$

$$Q_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 0 & -10 \\ 0 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-120}{-276} \cong 0{,}43$$

sonucu elde edilir. Buna göre üretim değerleri sırasıyla

$$(Q_1, Q_2, Q_3) = (1{,}04;\ 1{,}22;\ 0{,}43)$$

dür. Bu değerlerin maksimum olup olmadığı test etmek için Hessian matrisi oluşturulur ve asal minörlerinin işaretine bakılır.

$$|H| = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$|H_1| = -10 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$$|H_3| = |H| = -276 < 0$$

olduğundan Hessian matrisi negatif tanımlıdır ve bulunan değerler firmanın kârını maksimum yapan üretim düzeyleridir.

Örnek: Bireyin fayda fonksiyonu

$$U(X_1, X_2, X_3) = 160X_1 - 2X_1^2 + 120X_2 - 4X_2^2 + 130X_3 - 5X_3^2 + 30$$

ise optimum tüketim miktarlarını nasıl hesaplayabiliriz?

Önceki örneğe benzer yolla örnek çözülür.

KISITLI OPTİMİZASYON

Sonsuz olan insan ihtiyaçları karşısında kaynakların kıt olması çoğu zaman bir seçim yapmayı gerektirir. Bu seçim problemi ile bireyler, firmalar, kurumlar, hükümetler kısaca tüm ekonomik birimler karşı karşıya kalır. Yapılacak seçim bazen koşulsuz olacaktır. Koşulların olmadığı durumda yapılan seçime **"kısıtsız optimizasyon"** diyoruz. Eğer bir firma maliyetlerini göz önünde bulundurmadan başka firmaların piyasa girmesini engellemek için, hasılatını maksimize etmeyi amaçlıyorsa, bu bir kısıtsız optimizasyondur.

Fakat iktisatta seçim çoğu zaman kısıtlar altında yapılmak zorundadır. Tüketici bütçesini ve ürün fiyatlarını göz önünde bulundurup faydasını maksimize etmeyi amaçlayacak, firma maliyetlerini göz önünde bulundurup üretimini maksime etmeye çalışacak, hükümetler enflasyonu yükseltmeden istihdamı artırmayı amaçlayacaktır. Tüm bu örnekler bir amacın çeşitli kısıtlar altında gerçekleştirilmesini gerektiren bir sürece işaret etmektedir. İşte bir amacın belirli kısıtlar altında gerçekleştirilmesine **"kısıtlı optimizasyon"** diyoruz. Burada optimizasyon bazen bir maksimizasyon problemi olarak karşımıza çıkarken bazen de bir minimizasyon problemi olarak karşımıza çıkabilir. Tüketici sınırlı bütçesi ile kendisine en fazla faydayı sağlayacak tüketim bileşimini seçerken bir kısıt altında maksimizasyon problemi ile karşı karşıya iken, belirli bir üretim miktarını en düşük maliyetle gerçekleştirmek isteyen firmanın karşı karşıya kaldığı problem ise bir minimizasyon problemidir.

Amaç ister maksimizasyon, isterse minimizasyon olsun her iki durum da belirli kısıtlar altında çözülen bir kısıtlı optimizasyon problemidir.

Kısıtlı optimizasyon matematiksel olarak ise bir fonksiyonu belirli kısıt ya da kısıtlar altında minimum ya da maksimum yapan değerleri bulmak şeklinde tanımlanabilir.

Optimizasyon problemlerine kısıt konmasının temel amacı iktisadın kıt kaynak problemini esas almaktadır. Örneğin bireylerin çalışma-boş zaman tercih problemlerini çözerken bir günde 24 saat olduğu ve bu 24 saatin 8 saatini uyuyarak geçireceği kısıtını koymaz isek birey faydasını maksimize edecek çalışma-boş zaman bileşimi seçerken 16 saatten fazla çalışmayı tercih edebilecektir. Böyle bir sonuç ise gerçekle uyumsuz sonuçlarının ortaya çıkmasına neden olabilecektir.

Bir kısıtlı optimizasyon problemi üç farklı şekilde çözülebilir. Bunlar:
- Yerine koyma metodu,
- Toplam diferansiyel metodu ve
- Lagrange çarpanı metodudur.

Şimdi sırasıyla bu üç metodu açıklayalım.

Yerine Koyma Metodu İle Kısıtlı Optimizasyon

$f(x, y)$ amaç fonksiyonunu $g(x, y) = k$ kısıtı altında optimize etmenin birinci yolu kısıtı amaç fonksiyonu içerisine koymaktır. Bunun için öncelikle kısıt fonksiyonundaki y'yi, x ve k'nın bir fonksiyonu olarak yazmalıyız:

$$g\,(x, y) = k \qquad (1)$$

$$y = h(x, k) \qquad (2)$$

Şimdi x ve k'nın bir fonksiyonu olarak yeniden düzenlenmiş kısıtı amaç fonksiyonuna koyarsak amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$f(x, h(x, k)) \qquad (3)$$

Aslında bu kısıtsız optimizasyondan başka bir şey değildir. Eğer yukarıdaki fonksiyonun x'e göre türevini alırsak I. dereceden koşullara ulaşabiliriz:

$$\frac{\partial f(x,h(x,k))}{\partial x} = f_x + f_h \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

Kapalı fonksiyon kuralından faydalanırsak;

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{g_x}{g_y} \qquad (5)$$

olur. Buradan I. dereceden koşullar:

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y} \qquad (6)$$

olacaktır. Eşitlik (6)'da verilen birinci dereceden koşulları sağlayan x ya da y ifadesi kısıt fonksiyonunda yerine konulmak suretiyle, amaç fonksiyonunu $g(x, y) = k$ kısıtı altında optimize eden x* ve y* kritik değerleri bulunabilir.

Örnek: $f(x, y) = xy$ amaç fonksiyonunu $g(x, y) = 4x + 2y = 40$ kısıtı altında yerine koyma metodu ile optimize ediniz.

Çözüm: Önce kısıt fonksiyonunu y cinsinden yazalım:
Kısıt: $g(x, y) = 4x + 2y = 400$
$$y = h(x, k) = 20 - 2x$$
Şimdi bu kısıt fonksiyonun amaç fonksiyonunda yerine yazalım:
$$f(x, y) = f(x, h(x, k)) = x(20 - 2x)$$
Şimdi yukarıdaki kısıtı içeren amaç fonksiyonunu optimize edelim:
$$\frac{\partial f(x,h(x,k))}{\partial x} = 20 - 4x = 0$$
$$x^* = 5$$
bulunur. Bu değeri $y = h(x, k) = 20 - 2x$ fonksiyonunda yerine koyarsak:
$$y^* = 5$$
olur. x^* ve y^* değerleri veri iken, fonksiyonun değeri:
$$f(x, y) = x^* y^* = 50$$
bulunur. Bulunan kritik değerlerin amaç fonksiyonunu minumum mu yoksa maksimum mu yaptığını II. dereceden koşullarını inceleyerek söyleyebiliriz:
$$\frac{\partial^2 f(x,h(x,y))}{\partial x^2} = -4 < 0$$
maksimum olur.

Toplam Diferansiyel Yaklaşımı ile Kısıtlı Optimizasyon

Amaç fonksiyonunu bir kısıt altında optimize etmenin bir diğer yolu toplam diferansiyel metodudur. Bu yaklaşımda hem amaç fonksiyonunun hem de kısıtın toplam diferansiyeli alınıp eşanlı olarak çözülmesi gerekir.

Yine amaç fonksiyonumuz $f(x, y)$ ve kısıt fonksiyonumuz $g(x, y) = k$ olsun. Her iki fonksiyonun toplam diferansiyeli şöyle yazılabilir:
$$df = f_x dx + f_y dy \quad (7)$$
$$dk = g_x dx + g_y dy = 0 \quad (8)$$
Yukarıdaki ikinci eşitlikten;
$$dy = -\frac{g_x}{g_y} dx \quad (9)$$
yazılabilir. Eşitlik (9) daki ifadeyi eşitlik (7) de yerine koyarsak;

$$df = \left| f_x - \frac{g_x}{g_y} dx \right| \tag{10}$$

olur. Birinci dereceden koşulların sağlanabilmesi için df=0 olması gerekir. Bu koşulun sağlanabilmesi için ise:

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y} \tag{11}$$

olması gerekir.

Bir önceki optimizasyon metodunda olduğu gibi birinci dereceden koşulları sağlayan x yada y ifadesi kısıt fonksiyonunda yerine konulmak suretiyle amaç fonksiyonunu $g(x, y) = k$ kısıtı optimize eden x^* ve y^* değerleri bulunabilir.

Örnek: $f(x, y) = xy^2$ amaç fonksiyonunu $g(x, y) = 4x + 5y = 600$ kısıtı altında optimize ediniz.

Çözüm: Amaç ve kısıt fonksiyonunun I. dereceden koşulları eşitlik (11) verilmişti. Buna göre:

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y}$$

$$f_x = y^2 \quad f_y = 2y$$

$$g_x = 4 \quad g_y = 5$$

tir. Bunları yerlerine koyarsak:

$$\frac{y^2}{2xy} = \frac{4}{5}$$

olur. Buradan $x = \frac{5}{8}y$ ya da $y = \frac{8}{5}x$ bulunur. Bu x ve y değerlerinden herhangi biri kısıt fonksiyonunda yerine konursa:

$$g(x, y) = 4x + 5y = 600$$

$$= 4x + 5 \cdot \frac{8}{5}x = 600$$

$$x^* = 50$$

olur. $y = \frac{8}{5}x$ olduğuna göre: $y^* = 80$ bulunur.

Lagrange Çarpanı Metodu İle Kısıtlı Optimizasyon

Kısıtlı optimizasyon problemindeki Lagrange çarpanı amacın kısıttaki değişime duyarlılığını ölçmektedir. Dolayısıyla Lagrange çarpanı amaç ile kısıt arasındaki marjinal ilişkinin şiddetini ölçer. Çünkü karşı karşıya kalınan probleme göre Lagrange çarpanına farklı anlamlar yüklemek mümkün olacaktır. Örneğin tüketicinin bütçe kısıtı altındaki fayda maksimizasyon probleminde, λ harcamanın marjinal faydasına işaret ederken, bir firmanın belirli bir üretim kotası altındaki maliyet minimizasyon probleminde ise üretimin marjinal maliyetini gösterecektir.

KISITLI OPTİMİZASYON İLE İKTİSADİ UYGULAMALAR

İktisadi hayatta kıt kaynaklar karşısında pek çok ihtiyaçların varlığı hemen hemen birçok iktisadi sorunun bir kısıt altında çözümü, diğer bir deyişle, kısıtlı optimizasyonu gerektirir. Tüketicinin fayda maksimizasyon problemi, bireylerin çalışma-boş zaman tercihi, firmanın kapasite kısıtı altında kâr maksimizasyon problemi, girdi fiyatları sabit ve firmanın finansman olanakları sınırlı iken üretimin maksimize edilmesi ya da belirli bir üretim düzeyinin en düşük maliyetle gerçekleştirilmesi ve bunlara benzer birçok iktisadi mesele kısıtlı optimizasyon teknikleri kullanılarak çözülebilir. Biz burada bunlardan sadece en sık karşılaşılan optimizasyon problemlerini ele alıp okuyucuların kısıtlı optimizasyon tekniklerini tüm iktisadi problemlere uygulamalarını bekliyor olacağız. Şimdi bu örnekleri kısaca inceleyelim.

Tüketicinin Fayda Maksimizasyonu

Hemen hemen birçok iktisat teorisi kitabında karşınıza çıkacak ilk kısıtlı optimizasyon problemi tüketicinin fayda maksimizasyon problemidir. Tüketicinin tükettiği malların fiyatları veri ve bu mallara harcayacak finansman olanaklarının belirli bir sınırı var iken, tüketicinin problemi faydasını maksimize etmektir. Konuyu daha iyi anlamak için tüketicinin x ve y gibi iki mal tükettiğini ve bu malları P_x ve P_y fiyatlarından satın alabildiğini varsayalım. Tüketicinin faydası tükettiği malların miktarının bir fonksiyonu olduğuna göre tüketicinin fayda fonksiyonunu, yani amaç fonksiyonunu şöyle yazabiliriz.

$$U = U(x, y) \qquad (25)$$

Tüketicinin bütçesini M ile gösterirsek, tüketicinin bütçe fonksiyonunu, yani kısıt fonksiyonunu da, aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$M = P_x X + P_y Y \qquad (26)$$

Bu durumda tüketicinin problemi aşağıdaki gibi olacaktır:

maksimize et: $U = U(x, y)$

kısıt: $M = P_x X + P_y Y$

Yukarıdaki problemi "yerine koyma" ya da "toplam diferansiyel" yada "Lagrange" metotlarından herhangi biri ile çözmek mümkün olsa da Lagrange metodunun daha önce bahsettiğimiz üstünlüğü nedeni ile tüketicinin optimizasyon problemini Lagrange metodu ile çözelim:

Bunun için önce Lagrange fonksiyonunu oluşturup I. dereceden koşulları bulalım:

$$L(x, y, z) = U(x, y) + \lambda(M - P_x x - P_y y) \tag{27}$$

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda P_x = 0 \tag{28}$$

$$L_y = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda P_y = 0 \tag{29}$$

$$L_y = \frac{\partial L}{\partial y} = M - P_x x - P_y y = 0 \tag{30}$$

Yukardaki eşitlik (28) ve (29) dan:

$$\lambda = \frac{\partial U/\partial x}{P_x} = \frac{\partial U/\partial y}{P_y} \tag{31}$$

Aslında $\frac{\partial U}{\partial x}$ ve $\frac{\partial U}{\partial y}$ x ve y mallarının marjinal faydalarından başka bir şey değildir. x ve y mallarını marjinal faydalarını $MU_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ ve $MU_y = \frac{\partial U}{\partial y}$ ile gösterirsek, eşitlik (31) şöyle yazılabilir:

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} \tag{32}$$

Eşitlik (32)'den bulunacak x ya da y ifadesi L_λ da yerine konularak tüketicinin bütçe kısıtı altına faydasını maksimize eden x^* ve y^* malı talep miktarı (ya da fonksiyonlarını), yani tüketicinin optimal tüketim bileşimi bulmak mümkündür.

Yukarıda bulunan sonuca "tüketicinin fayda optimizasyonu" veya "tüketici dengesi" denir ve şu şekilde yorumlanır: İki mal tüketen bir tüketicinin mevcut bütçe kısıtı altında faydasını maksimize edebilmesi için malların marjinal faydalarının fiyatlarına oranı birbirine eşit olması gerekir. Bu tüketicinin mallara harcadığı son liraların marjinal faylarının birbirlerine eşit olması anlamına gelir.

Eşitlik (32)'de gösterilen tüketici dengesi şu şekilde de yazılabilir:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{P_x}{P_y} \tag{33}$$

İki mal tüketen bir tüketicinin bu iki maldan sağladığı marjinal faydaların birbirine oranına marjinal ikame oranı (MRS) denir. Bu durumda yukarıdaki eşitlik;

$$\frac{MU_x}{MU_y} = MRS_{yx} = \frac{P_x}{P_y} \tag{34}$$

şeklini alır. Eşitlik (34) mallar arasındaki MRS'nin fiyat oranına eşit olması demektir ki, tüketicilerin tercihlerini yansıtan farksızlık eğrinin eğimi ile tüketicinin bütçe kısıtını gösteren bütçe doğrusunun eğiminin birbirine işit olmasından başka bir şey değildir.

Son olarak, Tüketicinin faydasını bütçe kısıtı altında maksimize ederek elde dilen talep fonksiyonlarına bayağı (Marshalgil) talep fonksiyonları denir. Bayağı talep fonksiyonları talep miktarını tüketicin geliri ve malların fiyatlarının bir fonksiyonu olarak ifade eder. x ve y malları bayağı talep fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılabilir:

X malı bayağı talep fonksiyonu: $X_M^* = X(P_x, P_y, M)$
Y malı bayağı talep fonksiyonu: $Y_M^* = Y(P_x, P_y, M)$

Örnek: Fayda fonksiyonu $U(x,y) = x^{0,5}y^{0,3}$ biçiminde olan bir tüketici, x malını ₺10 ve y malını ₺3'den satın almaktadır. Bu iki mal için harcayabileceği toplam ₺400'si olan bu tüketicinin faydasını maksimize eden optimal tüketim bileşimini bulunuz. Bulunan tüketim bileşiminin faydayı maksimum yapıp yapmadığını kontrol ediniz.

Çözüm: Bu problemi çözebilmek için öncelikle tüketicinin kısıt fonksiyonunu (bütçe kısıtını) oluşturmak gerekir. Yukarıda verilen bilgilere göre tüketicinin bütçe kısıtı şöyle yazılabilir:

$M = P_xX + P_yY$ ise $400 = 10x + 3y$

Bu durumda tüketicinin problemi:

Maksimize et: $U(x,y) = x^{0,5}y^{0,3}$
kısıt: $400 = 10x + 3y$

Fayda optimizasyon probleminin çözümü için gerekli Lagrange fonksiyonu ve I. dereceden koşulları aşağıdaki gibi olacaktır:

$$L(x,y,\lambda) = x^{0,5}y^{0,3} + \lambda(400 - 10x - 3y)$$
$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 0,5x^{-0,5}y^{0,3} - 10\lambda = 0$$
$$L_y = \frac{\partial L}{\partial y} = 0,3x^{0,5}y^{-0,7} - 3\lambda = 0$$
$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 400 - 10x - 3y = 0$$
$$\lambda = \frac{0,5x^{-0,5}y^{0,3}}{10} = \frac{0,3x^{0,5}y^{-0,7}}{3}$$
$$x = \frac{1}{2}y \text{ ya da } y = 2x$$

bulunur. Bulunan x yada y ifadesini L_λ da yerine koyarsak:

$$400 - 10x - 3 \cdot 2x = 0$$
$$x^* = 25$$

$y^* = 50$
$\lambda \cong 0.03$

bulunur. Sonuç olarak bu tüketici, ürün fiyatları ve bütçesi veri iken, eğer x malından 25 ve y malından 50 birim tüketirse faydası maksimum olmaktadır. Bu tüketim bileşiminin tüketicinin faydasını maksimum yapıp yapmadığı sınırlandırılmış Hessian'a bakarak teyit edebiliriz.

$L_{xx} = -0{,}25x^{-1{,}5}y^{0{,}3}, \qquad L_{xy} = -0{,}15x^{-0{,}5}y^{-0{,}7}$
$L_{yy} = -0{,}21x^{0{,}5}y^{-1{,}7}, \qquad L_{yx} = -0{,}15x^{-0{,}5}y^{-0{,}7}$

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 3 \\ 10 & -0{,}25x^{-1{,}5}y^{0{,}3} & -0{,}15x^{-0{,}5}y^{-0{,}7} \\ 3 & -0{,}15x^{-0{,}5}y^{0{,}7} & -0{,}21x^{0{,}5}y^{-1{,}7} \end{vmatrix}$$

$|\overline{H}_2| = [-10(-2{,}1x^{-0{,}5}y^{-1{,}7} - 0{,}45x^{-0{,}5}y^{-1{,}7})] + [3(-1{,}5x^{-0{,}5}y^{-0{,}7}) + 0{,}75x^{-1{,}5}y^{0{,}3}]$
$|\overline{H}_2| = 21x^{-0{,}5}y^{-1{,}7} + 4{,}5x^{-0{,}5}y^{-1{,}7} - 4{,}5x^{-0{,}5}y^{-0{,}7} + 2{,}25x^{-1{,}5}y^{0{,}3}$
$|\overline{H}_2| = 21x^{-0{,}5}y^{-1{,}7} + 2{,}25x^{-1{,}5}y^{0{,}3} > 0$

$|\overline{H}_2| = |\overline{H}| > 0$ olduğu için sınırlandırılmış Hessian negatif belirlidir. Dolayısıyla fayda (U) maksimize edilmiştir.

Örnek: Yurtta kalan üniversite II. Sınıf öğrencisi Zarife, kahvaltısını her gün yurtta yaparken, öğle ve akşam yemeklerini okul yemekhanesinde veya dışarıda lokantada yemektedir. Zarife'nin bir aylık öğle ve akşam yemekleri için ayırdığı bütçesi ₺180'dir. Bir öğün yemeğin okul yemekhanesindeki fiyatı $P_Y = ₺3$ iken lokantada yemenin maliyeti $P_T = ₺6$ dir. Her ayın 5 gününü ailesinin yanında geçiren Zarife'nin fayda fonksiyonu aşağıda verilmektedir. (Not: Bir ay 30 gün olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla, Zarife her gün iki öğün olmak üzere toplam 25 gün-50 öğün yemekhane veya lokantada yemek yemesi gerekmektedir):

$\text{FAYDA} = U(Y, L) = Y^{0{,}5}L^{0{,}25}$

Y: Okul yemekhanesinde yenilen yemek.
L : Lokantada yenilen yemek.

Zarife'nin ₺180'lik yemek bütçesi ile faydasını maksimize edebilmesi için, öğle ve akşam yemeklerinin kaçını okul yemekhanesinde, kaçını lokantada yemelidir?

Cevap okuyucuya bırakılmıştır.

Tüketicinin Harcama Minimizasyonu

Tüketici her zaman faydasını maksimize etmeyi amaçlamayabilir. Bazen de belirli bir fayda düzeyine minimum harcamayla ulaşmayı hedefleyebilir. Böyle bir durumda amaç fonksiyonu tüketicinin bütçe fonksiyonu iken, kısıt fonksiyonu fayda fonksiyonu olacaktır.

İki mal tüketen bir tüketicinin bütçe fonksiyonu $M = P_x x + P_y y$ ve fayda fonksiyonu $U = U(x, y)$ ise, tüketicinin problemi;

Minimize et: $M = P_x x + P_y y$

Kısıt: $U = U(x, y)$

Harcama minimizasyonu durumunda Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$L(x, y, \lambda) = P_x x + P_y y + \lambda(\bar{U} - U(x, y))$$

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = P_x - \lambda \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad (35)$$

$$L_y = \frac{\partial L}{\partial y} = P_y - \lambda \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \qquad (36)$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{U} - U(x, y) = 0 \qquad (38)$$

$$\lambda = \frac{P_x}{\partial U / \partial x} = \frac{P_y}{\partial U / \partial y} \qquad (39)$$

Eşitlik (39) aslında tüketicinin fayda maksimizasyon problemindeki denge koşulundan (eşitlik 32) başka bir şey değildir:

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} \qquad (40)$$

O zaman buradan şu sonuç çıkarılabilir. Tüketicinin belirli bir fayda düzeyine en düşük harcama ile erişebilmesi için tükettiği malların marjinal faydalarının fiyatlarına oranı birbirine eşit olmalıdır.

Eşitlik (40) yeniden düzenlenirse tüketicinin harcama minimizasyonu için gerekli koşul aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\frac{MU_x}{MU_y} = MRS_{yx} = \frac{P_x}{P_y} \qquad (41)$$

Tüketici ister belirli bir bütçe ile faydasını maksimize etmek istesin, isterse belirli bir fayda düzeyine minimum harcama ile ulaşmayı hedeflesin, her iki durumda da malların marjinal faydalarının fiyatlarına oranının birbirlerine eşit olması yada MRS'nin fiyat oranına eşit olması gerektiği sonucu çıkarılabilir.

Tüketicinin hem fayda maksimizasyon hem de harcama minimizasyon problemlerinde optimum tüketim bileşimini belirleyen denge koşulları aynı olmakla birlikte talep fonksiyonları farklıdır. Tüketicinin belirli bir faydayı en düşük harcama ile elde etmesini sağlayacak talep fonksiyonları, malların fiyatları ile birlikte tüketicinin fayda düzeyinin bir fonksiyonudur ve Hicksgil talep fonksiyonu olarak adlandırılır.

Dolayısıyla x ve y mallarının Hicksgil talep fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

x malı Hicksgil talep fonksiyonu: $X_H^* = X(P_x, P_y, \overline{U})$
y malı Hicksgil talep fonksiyonu: $Y_H^* = Y(P_x, P_y, \overline{U})$

Firmalarda Kısıtlı Optimizasyon

Tıpkı tüketiciler gibi firmalar da faaliyetleri ile ilgili kararlar alırlarken çeşitli kısıtlarla karşı karşıya kalır. Dolayısıyla firmalar faaliyetleri ile ilgili olarak aldıkları kararlarda bir ya da birkaç kısıt altında belirli bir hedefe ulaşmak için optimal çözüm yolunu bulmaya çalışır. Firmaların karşı karşıya kaldığı en temel kısıtlı optimizasyon problemlerinden bazıları şöyle sıralanabilir:

• Belirli bir üretim düzeyini en düşük maliyetle gerçekleştirmek,
• Faktör fiyatları ve üretim teknolojisi veri iken, maksimum üretimi sağlayacak faktör bileşimini (faktör talebini) belirlemek,
• Kapasite kısıtı altında kârını maksimize etmek.

Aslında yukardaki problemlere daha birçoğu eklenebilir. Özellikle firmanın rekabet dereceleri farklı piyasalarda faaliyette bulunduğu göz önünde bulundurulursa firmalar rakip firmaların da kararlarını ve tepkilerini dikkate almaları gereken faklı optimizasyon problemleri ile karşı karşıya kalabilir. Fakat bu ünitede firmaların karşı karşıya kaldıkları en temel kısıtlı optimizasyon problemlerinden ikisi olan maliyet minimizasyonu ve üretim maksimizasyonundan bahsedilecektir.

Maliyet Minimizasyonu

Firmalar çoğu zaman kârlarını maksimize edebilmek için belirli bir üretimi en düşük maliyetle gerçekleştirmeyi hedeşer. Emek (L) ve sermaye (K) olmak üzere iki girdi kullanan bir firmanın üretim fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun.

$$q = q(K, L) \qquad (42)$$

Bu firmanın sermayeyi PK ve emeği PL fiyatlarından satın aldığını varsayarsak o zaman toplam maliyet fonksiyonunu şöyle yazabiliriz:

$$TC = P_K K + P_L L \qquad (43)$$

Eğer firmanın amacı belirli bir üretim düzeyini en düşük maliyetle gerçekleştirmekse, o zaman firmanın problemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

minimize et: $TC = P_K K + P_L L$

kısıt: $\bar{q} = q(K, L)$

Bu problemin çözümü için Lagrange fonksiyonu ve I. dereceden koşulları aşağıdaki gibi olacaktır:

$$L(K, L, \lambda) = P_K K + P_L L + \lambda(\bar{q} - q(K, L)) \tag{44}$$

$$L_K = \frac{\partial L}{\partial K} = P_K - \lambda \frac{\partial q}{\partial K} = 0 \tag{45}$$

$$L_L = \frac{\partial L}{\partial L} = P_L - \lambda \frac{\partial q}{\partial L} = 0 \tag{46}$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{q} - q(K, L) = 0 \tag{47}$$

$$\lambda = \frac{P_K}{\partial U/\partial K} = \frac{P_L}{\partial U/\partial L} \tag{48}$$

$\frac{\partial q}{\partial K} = MP_K$ (sermayenin marjinal fiziki ürünü) ve $\frac{\partial q}{\partial L} = MP_K$ (emeğin marjinal fiziki ürünü) olduğundan;

Eşitlik (48) şöyle yazılabilir:

$$\frac{MP_L}{MU_K} = \frac{P_L}{P_K} \tag{49}$$

Faktörlerin marjinal fiziki ürünlerinin oranı fakatörlerarası marjinal ikame oranına (M_{TS}) eşit oluğundan;

$$\frac{MP_L}{MU_K} = M_{TS} = \frac{P_L}{P_K} \tag{50}$$

olur. Eşitlik (50) de bulunan firmanın optimizasyon koşulu, firmanın maliyet minimizasyonunu sağlayan optimal üretim faktörü talep fonksiyonlarını verecektir.

Örnek: Sermayeyi $P_K = ₺20$ ve emeği $P_L = ₺5$ den satın alan bir firmanın üretim fonksiyonu $q = 10K^{0,5}L^{0,5}$ dir. Firma aldığı 3600 birimlik siparişi en ucuz maliyetle gerçekleştirebilmek için her bir faktörden kaç birim satın almalıdır?

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

Üretim Maksimizasyonu

Firmaların sıkça karşılaştıkları bir başka optimizasyon problemi, sınırlı parasal olanaklarla, yani sınırlı sermaye ile üretimlerini maksimize etmeleri-dir. Aslında bu problem maliyet minimizasyon probleminin tersidir. Bu optimizasyon probleminde firmanın amaç fonksiyonu üretim fonksiyonu iken, kısıtı maliyet fonksiyonudur. Firmanın kısıtlı üretim maksimizasyon problemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

maksimize et: $q = q(K, L)$
kısıt: $TC = P_K K + P_L L$

Örnek: Firmanın maliyet kısıtı altında üretiminin maksimize edilmesi için Lagrange fonksiyonunu yazınız ve I. derecen koşulların sonucu olan firma dengesini bulunuz.

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Analiz Ders Notları, Osmangazi Üniversitesi, 2012, Eskişehir.
2. Komisyon, Matematiksel İktisat, Anadolu Üniversitesi, 2012, Eskişehir.
3. Arş. Gör. Sefa ERKUŞ, Matematiksel İktisat Ders Notları, Karabük Üniversitesi, 2012, Karabük.