3. BÖLÜM
MARJİNAL FONKSİYONLAR

Daniel Bernoulli
08 Şubat 1700, Groningen, Hollanda – 17 Mart 1782, Basel, İsviçre

MARJİNAL FONKSİYONLARA GİRİŞ

3.1. Tanım: Bir ürünün ekonomideki anlık değişim hızına marjinal fonksiyonlar denir. Bu durum ise fiziksel olarak o fonksiyonun türevini verir. O zaman bir fonksiyonun türevi marjinal fonksiyondur.

Yine, bir gelir fonksiyonu verildiğinde gelir fonksiyonunun türevi bize marjinal hasıla (marjinal gelir) fonksiyonunu verir.

Marjinal Maliyet

3.2. Tanım: Bir malın toplam hasılanın fonksiyonunun bir noktadaki türevine, bu malın bu noktadaki marjinal maliyeti denir. Üretim miktarının bir fonksiyonu olarak ifade edebileceğimiz toplam maliyet fonksiyonunu T_C ile, marjinal maliyet fonksiyonunu ise M_C ile gösterirsek, marjinal maliyet aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_C = \frac{dT_C}{dQ} = T'_C$$

Yani bir şirketin bir maldan birim üretmek için yaptığı toplam harcama M_C olarak kabul edilirse şirket sahibi herhangi bir üretim miktarında maliyetin değişim hızını bilmek ister.

Örnek: Bir malın mal miktarı x, toplam maliyet fonksiyonu

$$M_C(x) = 3x^2 + x + 5, 0 \leq x \leq 30$$

şeklinde verilsin. Bu üründen 2 birim mal üretildikten sonraki ürünün maliyeti,

$$M_C(3) - M_C(2) = (3 \cdot 3^2 + 3 + 5) - (3 \cdot 2^2 + 2 + 5) = ₺16$$

ilave olarak, hiçbir ürün üretilmediğindeki durumdan ilk ürünün maliyeti,

$$M_C(1) - M_C(0) = (3 \cdot 1^2 + 1 + 5) - (3 \cdot 0^2 + 0 + 5) = ₺4$$

olarak bulunur. //

Ekonomistler maliyetin üretilen parça sayısına göre anlık değişim hızını birim değişimdeki maliyet olarak adlandırırlar. Bunu da türev demektir. Bu toplam maliyet fonksiyonun türevine marjinal maliyet fonksiyonu denir.

Örnek: Bir malın mal miktarı x, toplam maliyet fonksiyonu

$$M_C(x) = 3x^2 + x + 8, 0 \leq x \leq 30$$

şeklinde verilsin. $x = 2$ ve $x = 0$ ürünlerdeki marjinal maliyetini bulunuz.

Çözüm: Marjinal maliyet fonksiyonu,

$$M_C'(x) = 6x + 1, 0 \leq x \leq 30$$

bulunur

$$M_C'(2) = 6 \cdot 2 + 1 = 13 \text{ ve } M_C'(0) = 6 \cdot 0 + 1 = 1$$

şeklindedir.

Örnek: $M_C(x) = -3x^2 + 5x + 16$ toplam maliyet fonksiyonunun 0 ve 3 noktalardaki anlık değişim hızlarını bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun türevi $M_C'(x) = -6x + 5$ olarak bulunur. Bu fonksiyon marjinal fonksiyondur. Farklı noktalardaki anlık değişim hızları:

$x = 0$ için $M_C'(0) = 5$

$x = 3$ için $M_C'(3) = -6 \cdot 3 + 5 = -13$

olarak bulunur.

Örnek: Bir tüccar tanesi ₺30 olan belirli bir ürün satın almaktadır. Bu tüccarın taşıma giderleri de ₺1 000'dir. Toplam maliyet fonksiyonunu yazınız ve marjinal maliyeti bulunuz.

Çözüm: x ürün sayısı olsun. Buna göre toplam maliyet fonksiyonuna y dersek, bu durumda $M_C(x) = 30x + 1\,000$ olur. O halde marjinal maliyet fonksiyonu $M_C'(x) = 30$ da olur. Buna göre her bir ürün için anlık değişimi hızı 30 olur.

Örnek: $M_C(x) = 24x^2 - 6x, 0 \leq x \leq 20$ maliyet fonksiyonu verilmiş olsun. Maliyet fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralığı bulunuz.

Çözüm: Marjinal maliyet fonksiyonu,

$M_C'(x) = 48x - 6 = 0$ ise $x = 8$ dir. Türev konusunda artan ve azalan hakkındaki bilgilerimizi hatırlarsak, $x = 8$ denkleminden, $x > 0$ için fonksiyonun artan olduğu ve $x < 0$ için de azalan olduğu görülür. O halde tanım kümesi içerisine düşen maliyet fonksiyonu $[8, 20]$ aralığında artan ve $[0, 8]$ aralığında azalandır. //

Firmaların marjinal maliyet fonksiyonları genellikle önce azalan, sonra artan bir grafiğe sahiptir. Böyle bir marjinal maliyet fonksiyonunun elde edilebilmesi için, toplam maliyet fonksiyonunun belli özelliklere sahip olması gerekir:

i) Toplam maliyet fonksiyonu türevi önce azalan, sonra artan bir fonksiyon olmalıdır.

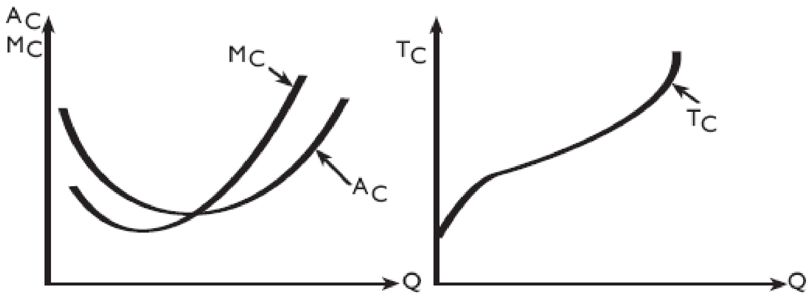
ii) Üretim miktarı artarken toplam maliyet fonksiyonu asla azalmamalıdır.

Aşağıdaki gibi kübik (3. Dereceden) bir fonksiyon, her iki özelliği de taşımaktadır:

$$T_R = aQ^3 - bQ^2 + cQ + d, \quad a, b, c, d > 0 \text{ ve } b^2 < 3ac$$

Bu fonksiyon üçüncü dereceden bir polinomdur. Böyle bir toplam maliyet fonksiyonundan elde edilecek marjinal maliyet (M_C) ve ortalama maliyet (A_C) fonksiyonları şöyle olacaktır:

$$T_R = TC' = 3aQ^2 - 2bQ + c$$
$$A_C = \frac{TC}{Q} = aQ^2 - bQ + c + \frac{d}{Q}$$



Bu şekildeki maliyet fonksiyonlarının grafikleri üstteki şekilde gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, toplam maliyet fonksiyonu monoton, yani sürekli artan bir fonksiyondur. Buna karşılık, marjinal ve ortalama maliyet fonksiyonları önce azalan, sonra artan bir grafiğe sahiptir. Bunun nedeni, her iki fonksiyonun da karesel birer fonksiyon olmalarıdır.

Örnek: Aşağıda verilen toplam maliyet fonksiyonundan, ortalama maliyet ve marjinal maliyet fonksiyonlarını elde edelim:

$$T_C = 2{,}5Q^3 - 13Q^2 + 50Q + 12$$

Böyle bir toplam maliyet fonksiyonundan elde edilecek ortalama maliyet fonksiyonu,

$$A_c = \frac{TC}{Q} = 2{,}5Q^2 - 13Q + 50 + \frac{12}{Q}$$

ve marjinal maliyet fonksiyonu,

$$M_C = \frac{dTC}{dQ} = 7{,}5Q^2 - 26Q + 50$$

olarak bulunacaktır. Herhangi bir üretim seviyesi için ortalama veya marjinal maliyeti bulmak için, üretim miktarını elde edilen fonksiyonlarda yerine koymak yeterlidir. Mesela $Q = 10$ için ortalama ve marjinal maliyetler;

$$A_c = \frac{TC}{Q} = 2{,}5 \cdot 10^2 - 13 \cdot 10 + 50 + \frac{12}{10} = 171{,}2$$

$$M_c = \frac{dTC}{dQ} = 7{,}5 \cdot 10^2 - 26 \cdot 10 + 50 = 540$$

biçiminde olur.

Marjinal Hasıla

3.3. Tanım: Bir malın toplam hasılanın fonksiyonunun bir noktadaki türevine, bu malın bu noktadaki marjinal hasıla (marjinal gelir) denir. M_R ile gösterilir. Marjinal maliyetle ilgili benzer durumlar toplam gelir için de geçerlidir.

Marjinal hasılayı değişim oranı olarak aşağıdaki gibi ifade ederiz:

$$\frac{\Delta T_R}{\Delta Q}$$

Hasıla fonksiyonunun türevi alınabilir, yani sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayarsak, marjinal hasılayı miktardaki çok küçük bir artışın, toplam hasılada meydana getireceği değişiklik olarak tanımlayabiliriz. Diğer bir ifadeyle marjinal hasıla, toplam hasıla fonksiyonunun türevidir:

$$M_R = \frac{dT_R}{dQ}$$

Örnek: Bir malın mal miktarı x, toplam hasılat (gelir) fonksiyonu

$$M_R(x) = 2x^2 + x + 15\ \text{TL}, 0 \leq x \leq 50$$

şeklinde verilsin. $x = 2$ ve $x = 0$ ürünlerdeki marjinal geliri bulunuz.

Çözüm: Marjinal gelir fonksiyonu,

$$M_R'(x) = 4x + 1$$

bulunur. Buna göre;

$$M_R'(x) = 4 \cdot 2 + 1 = 9\ \text{TL}, R'(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1\ \text{TL}$$

şeklindedir.

Örnek: $M_R(x) = -x^2 + 3x$ gelir fonksiyonu verilmiş olsun. Gelir fonksiyonun maksimum olduğu noktayı bulunuz.

Çözüm: Marjinal gelir fonksiyonu,

$$M_R'(x) = -2x + 3 \text{ ise } x = \frac{3}{2}$$

$$M_R'\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		∞
R(x)		+	0	−	
R'(x)	$-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	$-\infty$

dir. Maksimum noktası $\frac{3}{2}$ dır.

Örnek: Fransız havayolu taşımacılığı şirketi Air France, Concorde serisinin emekliliği nedeniyle 120 yolcu kapasiteli son uçağıyla özel bir dünya turu yapmaya karar vermiş ve piyasa araştırmalarıyla; bilet ücreti 100 000

Fransız Frangı (FF) olduğunda ancak 60 müşterinin bilet alabileceği ve her bir %5'lik indirim için 10 müşterinin daha geleceği görülmüştür. Air France bu kampanyadan maksimum gelir elde edebilmek için bilet fiyatını kaç FF yapmalıdır?

Çözüm: x = Yapılacak indirimlerin sayısı
$\text{Bilet Fiyatı} = 10^5 \cdot (1 - 0{,}05x)$
$\text{Yolcu Sayısı} = 60 + 10x$
Gelir = Bilet Fiyatı · Yolcu Sayısı
$M_R(x) = [10^5 \cdot (1 - 0{,}05x)] \cdot (60 + 10x)$
$M_R(x) = 6 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 x - 5 \cdot 10^4 x^2$
$M_R'(x) = 7 \cdot 10^5 - 10^5 x = 0$
$x = 7$

Ancak, uçağın yolcu kapasitesi de dikkate alınmalıdır. Çünkü $x = 7$ ise $\text{Yolcu Sayısı} = 60 + 10 \cdot 7 = 130 > 120$ olduğundan kapasiteyi aşmaktadır.

$x = 6$ için Yolcu Sayısı $60 + 10 \cdot 6 = 120$ sağlanmaktadır. Bu durumda maksimum gelir için gereken bilet fiyatı da $10^5 \cdot (1 - 0{,}05 \cdot 6) = 70\,000$ FF olmaktadır. //

Marjinal fonksiyonlarla ilgili önemli bir noktayı vurgulamamız gerekir. Değişim oranı ile türev ifadelerinden elde edilecek marjinal hasıla değerleri tam olarak aynı olmayacak, fakat birbirlerine çok yakın olacaktır:

$$\frac{\Delta T_R}{\Delta Q} \approx \frac{dT_R}{dQ}$$

Bunun nedeni, türevin çok küçük bir değişimi ifade etmesidir. Buna karşılık değişim oranı, herhangi bir miktardaki değişimi gösterebilir.

Örnek: $T_R = 100 \cdot Q - 2 \cdot Q^2$ marjinal hasıla denklemini hem değişim oranı hem de türev yardımıyla hesaplayalım. Önce, satış miktarındaki bir birimlik bir artışın toplam hasılayı nasıl değiştirdiğine bakalım. $Q = 15$ değerini toplam hasıla fonksiyonunda yerine koyarsak

$$T_R = 100(15) - 2 \cdot 15^2 = 1050$$

olarak elde ederiz. Şimdi satış miktarındaki bir birimlik bir artışın toplam hasılayı ne kadar artırdığına bakalım. $Q = 16$ için toplam hasıla,

$$T_R = 100 \cdot 16 - 2 \cdot 16^2 = 1088$$

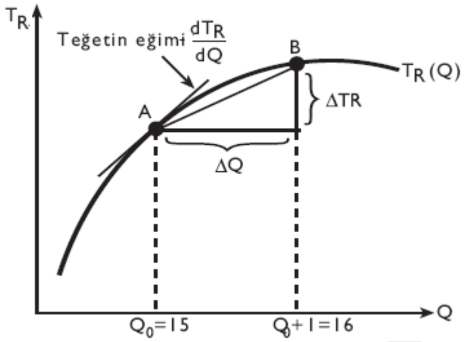
olacaktır. Burada $\Delta Q = 16 - 15 = 1$ dir. Görüldüğü gibi, satış miktarındaki biri birimlik artış toplam hasılayı, $\Delta T_R = 1088 - 1050 = 38$ kadar artırmıştır. Dolayısıyla, değişim oranı olarak elde edilen marjinal hasıla

$$M_R = \frac{\Delta T_R}{\Delta Q} = \frac{38}{1} = 38$$

olarak elde edilir. Buna karşılık türev kullanarak, marjinal hasılayı

$$T'_R = 100 - 4Q = 100 - 4 \cdot 15 = 40$$

olarak elde edilir. Aradaki bu farkı şekil üzerinde görelim.



Ortalama Hasıla

3.4. Tanım: Satılan birim başına oluşan hasıla değerine ortalama hasıla denir ve toplam hasılanın satılan mal miktarına bölünmesiyle elde edilir:

$$A_R = \frac{T_R}{Q}$$

Ortalama hasıla da, marjinal hasıla gibi satılan mal miktarının bir fonksiyonudur.

Örnek: $T_R = 100Q - 2Q^2$ olarak verilen bir toplam hasıla fonksiyonundan ortalama hasıla fonksiyonunu aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$A_R = \frac{T_R}{Q} = \frac{100Q - 2Q^2}{Q} = 100 - 2Q\ //$$

Burada da görüldüğü gibi, ortalama hasıla fonksiyonu toplam hasıla fonksiyonunu elde etmek için kullandığımız talep fonksiyonu ile aynıdır. Gerçekten de toplam hasıla fonksiyonunu $T_R = P \cdot Q$ olarak yazıp, sonra da ortalama hasılayı bulursak, $A_R = \frac{T_R}{Q} = P$ elde ederiz. Diğer bir ifade ile, ortalama hasıla malın fiyatına, yani talep fonksiyonuna eşittir.

Toplam hasıla fonksiyonunu, ortalama hasılayı kullanarak da ifade edebiliriz:

$T_R = P \cdot Q = A_R \cdot Q$

En sağdaki ifadenin türevini alırsak marjinal hasılayı, ortalama hasıla cinsinden ifade etmiş oluruz. Bu türevi almak için, çarpım kuralını uygulamamız gerekecektir:

$$M_R = T'_R = \frac{dT_R}{dQ} = \frac{dA_R}{dQ}Q + \frac{dQ}{dQ}A_R = A'_R Q + A_R$$

Yukarıda T'_R ve A'_R ifadeleri sırasıyla, toplam hasıla ve ortalama hasıla fonksiyonlarının türevlerini ifade etmektedir. Toplam hasıla ile ortalama hasıla arasındaki yukarıda elde edilen ilişkiden faydalanarak verilen bir ortalama hasıla fonksiyonundan toplam hasıla ve marjinal hasıla fonksiyonlarını elde edebiliriz.

Örnek: Ortalama hasıla fonksiyonu $A_R = P = 120 - 3Q$ ise toplam hasıla fonksiyonu,

$$T_R = A_R \cdot Q = (120 - 3Q)Q = 120Q - 3Q^2$$

ve marjinal hasıla fonksiyonu,

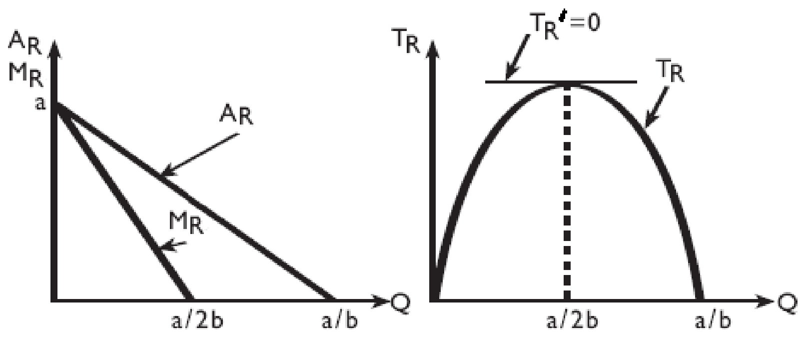
$$M_R = A_R{}' \cdot Q + A_R = -3Q + 120 - 3Q = 120 - 6Q$$

olarak bulunacaktır. //

Toplam hasıla, ortalama hasıla ve marjinal hasıla fonksiyonları arasındaki ilişkiyi görmek için, $T_R = aQ - bQ^2$ gibi bir toplam hasıla fonksiyonunu ele alalım. Buradan ortalama hasıla ve marjinal hasıla fonksiyonlarını aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$M_R = a - 2bQ$$
$$A_R = a - bQ$$

Görüldüğü gibi marjinal hasıla fonksiyonunun eğimi –2b iken, ortalama hasıla fonksiyonunun eğimi –b'dir. Diğer bir ifade ile, marjinal hasıla fonksiyonu ortalama hasıla fonksiyonundan daha diktir. Bu durum aşağıdaki şekilde görülmektedir.



Hem ortalama hasıla, hem de marjinal hasıla dikey ekseni aynı noktadan kesmektedir. Bu nedenle bütün Q değerleri için marjinal hasıla daima ortalama hasılanın altında olacaktır: $M_R \leq A_R$ dir.

Bu şekilde Q arttıkça toplam hasılanın önce arttığını sonra azaldığını görmekteyiz. Toplam hasıla, satış miktarı $Q = \frac{a}{2b}$ olana kadar artmaktadır. Bu nedenle $Q < \frac{a}{2b}$ olan bölgede, yani $Q = \frac{a}{2b}$ noktasının sol tarafında toplam hasılanın türevi pozitif olacaktır. Yani bu bölgede toplam hasıla artan bir fonksiyondur. Diğer bir ifade ile, bu bölgede marjinal hasıla sıfırdan büyüktür. Bunu sol taraftaki grafikte de görmekteyiz. $Q > \frac{a}{2b}$ olan bölgede ise toplam hasıla azalan bir fonksiyondur. Diğer bir ifade ile, marjinal hasıla sıfırdan küçüktür.

Toplam hasıla fonksiyonun artan fonksiyondan azalan fonksiyona dönüştüğü, yani $Q = \frac{a}{2b}$ olduğu noktada, türev sıfıra eşittir. Şekilde görüldüğü gibi, bu noktadaki teğet, miktar eksenine paraleldir, yani eğimi sıfırdır. Marjinal hasılanın sıfır olduğu bu nokta, aynı zamanda toplam hasılanın maksimum olduğu noktadır.

Buraya kadar bir monopol (tek tür) firmasının hasıla fonksiyonu ele aldık. Tam rekabet piyasasında faaliyet gösteren bir firmanın toplam, marjinal ve ortalama hasıla fonksiyonları farklı olacaktır. Bir tam rekabet firması fiyatı veri aldığı için, miktara bağlı bir talep fonksiyonu ile karşı karşıya değildir. Tam rekabet firması için fiyat bütün satış miktarları için aynıdır. Bu durumda toplam hasıla fonksiyonu $T_R = P \cdot Q$ şeklinde doğrusal bir fonksiyon olacaktır. Bu firmanın marjinal ve ortalama hasıla fonksiyonları da sabit ve fiyata eşit olacaktır:

$$M_R = A_R = P$$

Bu marjinal hasıla ve ortalama hasıla fonksiyonlarının grafiğini çizdiğimizde miktar eksenine paralel tek bir sabit fonksiyon elde ederiz.

Marjinal Kâr

3.5. Tanım: Bir malın kâr fonksiyonunun bir noktadaki türevine, bu malın bu noktadaki marjinal kârı denir. Yani marjinal maliyet ve gelirle ilgili benzer durumlar kâr fonksiyonu için de geçerlidir.

Örnek: Bir malın mal miktarı x, toplam hasılat (gelir) fonksiyonu,

$$M_R(x) = -0,2x^2 + 7x + 5 \text{ TL}, 0 \leq x \leq 30$$

ve toplam maliyet fonksiyonu,

$$C(x) = x^2 + x + 5 \text{ TL}, 0 \le x \le 30$$

şeklinde olduğu belirlenmiştir. Buna göre

a) Kâr fonksiyonunu bulunuz ve marjinal kâr fonksiyonu nedir?

b) $x = 2$ ve $x = 0$ ürünlerdeki marjinal kârı bulunuz.

Çözüm: Kâr fonksiyonunu $K(x)$ ile gösterirsek, $0 \le x \le 30$ aralığında,

$$\begin{aligned} K(x) &= M_R(x) - C(x) \\ &= (-0{,}2x^2 + 7x + 5) - (x^2 + x + 5) \\ &= -1{,}2x^2 + 6x \end{aligned}$$

elde edilir. Marjinal gelir ve marjinal maliyet fonksiyonları da sırasıyla,

$$M_R'(x) = -0{,}4x + 7 \text{ ve } C'(x) = 2x + 1$$

bulunur. Buna göre

$$M_R'(2) = -0{,}4 \cdot 2 + 7 = 6{,}2 \text{ TL ve } R'(0) = -0{,}4 \cdot 0 + 7 = 7 \text{ TL}$$

şeklindedir. Marjinal kâr fonksiyonu

$$K'(x) = -2{,}4x + 6$$

elde edilir

$$K'(2) = -2{,}4 \cdot 2 + 6 = 1{,}2 \text{ TL ve } K'(0) = -2{,}4 \cdot 0 + 6 = 6 \text{ TL}$$

bulunur.

Marjinal Fiziki Ürünü

3.6. Tanım: Herhangi bir üretim faktöründen ilave bir birimin kullanılması halinde toplam üretim miktarında meydana gelecek artış o üretim faktörünün marjinal fiziki ürününü denir. Bu tanım, üretim fonksiyonunun türevine karşılık gelmektedir. Sadece emek (L) faktörü kullanarak mal veya hizmet üreten bir firmayı ele alalım. Bu firmanın üretim fonksiyonunu iki temel özelliğe sahip olması gerekmektedir: (1) istihdam edilen emek faktörü artarken üretim miktarı da artmalıdır, (2) üretim miktarındaki artış, azalan oranda olmalıdır. İlk özellik emeğin marjinal fiziki ürününün pozitif olması gerektiğini söylemektedir.

İkinci özellik ise, azalan marjinal fiziki ürün veya azalan verimler yasasına karşılık gelmektedir. Azalan verimler yasası, diğer faktörler sabit iken bir üretim faktöründen kullanılan miktarı artırmaya devam edersek toplam üretime yapacağı katkının giderek azalacağını söylemektedir.

Şimdi de bir üretim fonksiyonunun sahip olması gereken özelliklerin matematiksel karşılıklarına bakalım.

Birinci özellik, üretim fonksiyonunun türevinin pozitif olması anlamına gelmektedir.

İkinci özellik ise üretim fonksiyonunun ikinci türevinin negatif olması demektir.

Üretim miktarını Q ile, emek faktörünü L ile, emeğin marjinal fiziki ürününü ise M_{PL} ile gösterirsek, 1. ve 2. özellik;

1. Özellik: $\frac{dQ}{dL} = M_{PL} > 0$

2. Özellik: $\frac{d^2Q}{dL^2} = \frac{d(M_{PL})}{dL} < 0$

biçiminde olur.

Örnek: $Q = 300\sqrt{L}$ fonksiyonunu olsun. Bu fonksiyonun yukarıdaki iki özelliğe de sahip olduğunu kontrol edebiliriz. Önce bu fonksiyonun türevini alalım:

$$M_{PL} \equiv \frac{dQ}{dL} = \frac{d}{dL}(300\sqrt{L}) = \frac{300}{2}\frac{1}{\sqrt{L}} = \frac{150}{\sqrt{L}} > 0$$

olur.

Emeğin marjinal fiziki ürününe eşit olan bu fonksiyon, bütün $L > 0$ değerleri için pozitiftir. Dolayısıyla bu fonksiyon, pozitif marjinal fiziki ürün şartını sağlamaktadır. Bu üretim fonksiyonunun azalan marjinal verimler yasasına uyup uymadığını görmek için ikinci türevini almamız gerekmektedir. Üretim fonksiyonunun ikinci türevinin, M_{PL} fonksiyonunun birinci türevine karşılık geldiğine dikkat ediniz:

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = \frac{d(M_{PL})}{dL} = \frac{d}{dL}\left(\frac{150}{\sqrt{L}}\right) = -\frac{150}{2}L^{-3/2} = -75L^{-3/2} < 0$$

Bu fonksiyon bütün $L > 0$ değerleri için negatiftir. Dolayısıyla azalan marjinal verimler yasası geçerlidir.

Marjinal İkâme Oranı

3.7. Tanım: Üretimde kullanılan üretim faktörlerini sermaye ve emek olarak iki gruba ayırabiliriz. Üretim sürecinde genellikle, üretim miktarını değiştirmeden, bir faktörün diğer faktör yerine ikâme edilmesi mümkündür. Örneğin aynı üretim miktarında, kullanılan emek miktarı azaltılarak bunun yerine daha fazla sermaye kullanılması mümkün olabilir. Bir faktörden daha fazla kullanıldığında, artırılan miktarı ile üretim miktarını sabit tutmak için diğer faktörden azaltılması gereken miktara arasındaki orana marjinal ikâme oranı denir ve M_{TS} olarak gösterilir. Q(K, L) gibi sermaye ve emek faktörlerinin kullanıldığı bir üretim sürecinde, M_{TS} aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M_{TS} \equiv \frac{dK}{dL}$$

Marjinal ikâme oranı ileride bahsedeceğimiz aynı zamanda eş ürün eğrilerinin eğimine eşittir. Mesela, $Q = K^{1/3}L^{2/3}$ şeklindeki bir üretim fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonda sermaye faktörü K ile gösterilmiştir. Marjinal ikâme oranını bulmak için, üretim fonksiyonunu sabit kabul ederek, fonksiyonu aşağıdaki gibi kapalı bir fonksiyon olarak yazalım.

$$F(K, L) = K^{1/3}L^{2/3} = \bar{Q}$$

Bu fonksiyon, eş ürün eğrisi olarak bilinir. Marjinal ikâme oranını bulmak için kapalı fonksiyon kuralını uygulamamız gerekir:

$$F_K = \frac{1}{3}K^{-2/3}L^{2/3}$$
$$F_L = \frac{2}{3}K^{1/3}L^{-1/3}$$
$$M_{TS} \equiv \frac{dK}{dL} = -\frac{F_L}{F_K} = -\frac{2(K^{1/3}L^{-1/3})/3}{(K^{-2/3}L^{2/3})/3} = -2\frac{K}{L}$$

MARJİNAL TÜKETİM ve TASARRUF

Tüketim fonksiyonunun toplam tüketim harcamalarını (C) , gelir (Y_d) ile gösterelim. Bu fonksiyon, kamu sektörünün ve dolayısıyla vergilerin olmadığı basit bir ekonomi için, genellikle $C = c_0 + c_1Y_d$ şeklindeki doğrusal bir fonksiyon olarak yazılır. Fonksiyondaki c_1 katsayısı özel bir öneme sahiptir.

Marjinal tüketim eğilimi adı verilen bu katsayı, gelirdeki bir liralık artışın ne kadarının tüketime gittiğini gösterir. Bu açıklamadan anlaşılacağı gibi aslında marjinal tüketim eğilimi, tüketim fonksiyonunun türevinden başka bir şey değildir:

$$\text{Marjinal Tüketim Eğilimi } M_{PC} = \frac{dC}{dM_C} = C' = c_1$$

Toplam gelirin tüketime gitmeyen kısmının tasarruf edilmesini $Y_d = C + S$ denklemi ile gösterilir. Bu ilişkiyi kullanarak

$$Y_d = C + S \text{ ise } S = Y - C$$
$$S = Y - c_0 - c_1Y_d$$

$$S = -c_0 + (1 - c_1)Y_d$$

bir tasarruf fonksiyonu elde edebiliriz.

Elde ettiğimiz bu tasarruf fonksiyonu, tüketim fonksiyonunun aksine pozitif eğimlidir. Tasarruf fonksiyonunun türevi bize marjinal tasarruf eğilimini verir. Marjinal tasarruf eğilimi, gelirdeki bir liralık artışın ne kadarının tasarruf edildiğini gösterir:

$$\text{Marjinal Tasarruf Eğilimi } M_{PS} = \frac{dS}{dY} = S' = 1 - c_1$$

Marjinal tasarruf eğilimi ile marjinal tüketim eğiliminin toplamlarının bire eşit olduğuna dikkat ediniz: $M_{PS} + M_{PC} = (1 - c_1) + c_1 = 1$ dir. Elde edilen gelirin ya tüketime, ya da tasarrufa gittiği düşünülürse, bu sonuç hiç de sürpriz değildir.

Yukarıdaki açıklamalar çerçevesinde $C = 150 - 0{,}8Y_d$ olarak verilen bir tüketim fonksiyonundan hareketle, marjinal tüketim eğilimi, tasarruf fonksiyonu ve marjinal tasarruf eğilimini elde edebiliriz. Marjinal tüketim eğilimi $M_{PS} = C' = 0{,}8$ olacaktır. Marjinal tasarruf eğilimini bulmak için tasarruf fonksiyonuna ihtiyacımız yoktur. $M_{PC} + M_{PS} = 1$ olduğuna göre,

$$M_{PS} = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

olacaktır. Tasarruf fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} S &= Y_d - C = Y_d - 150 + 0{,}8Y_d \\ &= -150 + (1 - 0{,}8)Y_d \\ &= -150 + 0{,}2Y_d \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

FAYDA FONKSİYONU

İktisatta önemli konulardan bir tanesi de azalan marjinal fayda konusudur. Örneğin çok aç olduğunuz bir zamanda yediğiniz ilk dilim pizzanın faydası ile dördüncü dilim pizzanın faydası farklı olacaktır. Pizza yemeyi sürdürdüğümüz zaman fayda artacak ancak azalarak artacaktır. Dolayısıyla böyle bir gerçeği yansıtan fayda fonksiyonunu doğrusal bir fonksiyonla gösteremeyiz. Çünkü doğrusal fonksiyonda eğim sabit olduğundan yediğiniz her dilim pizzanın faydası eşit olacaktır. Bu nedenle fayda fonksiyonları bükümlü olarak çizilerek y ekseninde faydaya, x ekseninde de kullandığımız ya da tükettiğimiz maddeye yer verilir.

Firmaların kârlarını maksimize etmeye çalışmaları gibi bireyler da faydalarını maksimize etmeye çalışırlar. Bunu gerçekleştirmek için de ne kadar çalışıp ne kadar boş zaman geçireceklerine ya da farklı malların hangisinden ne kadar tüketeceklerine karar vermek durumundadırlar. Bu tercihleri sayısal olarak ifade edebilmek için iktisatta U ile gösterilen fayda fonksiyonlarını kullanırız. Bir tüketicinin fayda fonksiyonu, toplam fayda veya tüketilen mal miktarlarının bir fonksiyonu olarak tüketiciler tarafından sağlanan tatmin olarak açıklanabilir. Eğer tüketici M_1 malından x_1 birim ve M_2 malından x_2 birim tüketerek fayda sağlıyorsa fayda fonksiyonu $U = U(x_1, x_2)$ şeklinde gösterilebilir. Bu fonksiyonu daha fazla malın tüketimine olanak sağlayacak şekilde genişletmek elbette mümkündür.

Herhangi bir malı tüketen tüketicinin marjinal faydası, diğer bütün malların tüketimi değişmediği durumda, söz konusu malın tüketimindeki birim başına artışın faydada sağladığı artış olarak tanımlanır. Yani fayda fonksiyonunun herhangi bir malın tüketim miktarına göre kısmi türevini alırsak bulduğumuz değere o malın marjinal faydası denir. $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ kısmi türevi bize x_i malının marjinal faydasını verir (MUx_i). Eğer x_1 küçük miktarda Δx_i kadar artarsa ve diğer değişken sabit tutulursa, faydadaki değişim yaklaşık olarak $\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x_i}\Delta x_i$ kadar olur. Eğer x_1 ve x_2 birlikte değişirse faydadaki değişim $\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\Delta x_2$ formülü ile hesaplanır.

Bir malın tüketim miktarı arttıkça, tüketilen son birim, bir önceki birime göre daha az fayda sağlar. Buna iktisatta azalan marjinal fayda kanunu diyoruz. Bu kanunu fayda fonksiyonu üzerinden matematiksel olarak gösterebiliriz. $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ kısmi türevi M_1 malının marjinal faydasını veriyordu. Marjinal faydanın x_1 e göre tekrar kısmi türevini alırsak $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}$ değeri negatif çıkar. Yani M_1 malının tüketimi arttıkça marjinal faydası azalmaktadır.

Örneğin bir tüketicinin fayda fonksiyonunun

$$U = 1\,000x_1 + 450x_2 + 5x_1x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$$

olduğunu varsayalım. Burada x_1 haftalık boş zaman, x_2 ise haftalık gelirdir. $x_1 = 140$ ve $x_2 = 400$ olması durumunda boş zamanın ve gelirin marjinal faydasını hesaplayalım.

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 1\,000 + 5x_2 - 4x_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = 450 + 5x_1 - 2x_2$$

Boş zaman ve gelir (140,400) ise

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 1\,000 + 5 \cdot 400 - 4 \cdot 140 = 2\,440$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = 450 + 5 \cdot 140 - 2 \cdot 400 = 350$$

Şimdi de tüketicinin iki saat fazladan çalışarak haftalık gelirini ₺40 arttırması sonucunda faydasında meydana gelecek değişimi hesaplayalım.

Eğer haftalık çalışma saati iki saat artıyorsa, boş zaman da 2 saat azalıyor demektir. Yani $\Delta x_1 = -2$ ve $\Delta x_2 = 40$ olur. Faydadaki değişim ise $\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\Delta x_2$ formülü ile hesaplanır.0

$$\Delta U \approx 2440(-2) + 350 \cdot 40 = 9\,120$$

olur.

Azalan marjinal fayda kuralının burada da geçerli olduğunu ikinci dereceden kısmi türevlerle gösterebiliriz.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = -4 < 0 \text{ ve } \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = -2 < 0$$

Fayda fonksiyonlarının grafik gösterimi farksızlık eğrileri ile olur. $U = f(x_1, x_2)$ fonksiyonu için oluşturulacak farksızlık eğrisi tüketicinin aynı fayda düzeyinde kalması koşulu ile x_1 ve x_2 mallarından tüketebileceği farklı miktarları göstermektedir.

Farksızlık eğrisinin eğimi genellikle negatif olur. Çünkü tüketici bir maldan daha az tüketiyorsa aynı fayda düzeyinde kalabilmek için diğer maldan daha fazla tüketmelidir.

Farksızlık eğrisinin eğimine Marjinal ikame oranı (MRS) adı verilir. Bu bize x_1 bir birim azalırsa aynı fayda düzeyinde kalmak için x_1 nin ne kadar artması gerektiğini verir. MRS x_1 ve x_2 mallarının marjinal faydaları kullanılarak hesaplanabilir.

Faydadaki toplam değişimin $dU \approx \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2$ olduğunu biliyoruz.

Verilen bir farksızlık eğrisi üzerinde fayda değişmediğine göre $dU = 0$ dır. Eşitlikte dU yerine 0 koyarak $\frac{dx_1}{dx_2}$ (farksızlık eğrisinin eğimi) değerine ulaşabiliriz.

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2$$

$$MU_{x_1} dx_1 = -MU_{x_2} dx_2$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}}$$

Yani farksızlık eğrisinin eğimi MRS, x_1 in marjinal faydasının x_2 nin marjinal faydasına oranıdır.

Örnek: Fayda fonksiyonu $U = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ ise marjinal ikame oranını x_1 ve x_2 cinsinden belirleyiniz.

ÜRETİM FONKSİYONU

Üretim fonksiyonunda çıktı (Q), sermaye (K) ve emek (L) girdilerinin fonksiyonu olarak açıklanır:

$$Q = f(K, L)$$

Sermayenin marjinal ürünü (MP_K) emek girdisi sabitken, sermaye girdisindeki bir birim artışın çıktıda ortaya çıkaracağı artış olarak tanımlanır ve üretim fonksiyonunun sermayeye göre kısmi türevi alınarak bulunur.

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

Emek girdisi sabitken sermaye küçük miktarda ΔK kadar değişirse çıktıdaki değişim $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial K} \Delta K$ formülü ile hesaplanır.

Emeğin marjinal ürünü (MP_L) ise sermaye girdileri sabitken, emek girdisindeki bir birim artışın çıktıda ortaya çıkaracağı artıştır ve üretim fonksiyonunun emeğe göre kısmi türevi alınarak bulunur.

Sermaye girdisi sabitken emek küçük miktarda ΔL kadar değişirse çıktıdaki değişim $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial L} \Delta L$ formülü ile hesaplanır.

Sermaye ve emek girdileri birlikte değiştiğinde ise çıktıdaki toplam değişim yaklaşık olarak $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L$ kadar olur.

Üretim fonksiyonunun grafiği eş ürün eğrileri ile gösterilebilir. Eş ürün eğrisi aynı çıktı düzeyini sağlayan emek ve sermaye girdilerinin farklı bileşimleridir. Eş ürün eğrisinin eğimine Marjinal İkame Oranı (M_{TS}) adı verilir. Eş ürün eğrisi üzerindeki herhangi bir noktada $(L = L_0, K = K_0)$ eğimin değeri, emekteki bir birimlik artış sonucunda, sermayenin ne kadar azalacağının ölçüsüdür.

Eş ürün eğrisinin eğimi, emek ve sermayenin marjinal ürünleri cinsinden ifade edilebilir. Çıktıdaki toplam değişim $dQ = \frac{\partial Q}{\partial L}dL + \frac{\partial Q}{\partial K}dK$ formülü ile hesaplanıyordu. Eş ürün eğrisi üzerinde çıktı miktarı sabit olduğundan $dQ = 0$ olur. Bunu denklemde yerine koyarak $\frac{dK}{dL}$ ifadesine ulaşabiliriz.

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial L}dL + \frac{\partial Q}{\partial K}dK$$
$$\frac{\partial Q}{\partial L}dL = -\frac{\partial K}{\partial K}dK$$
$$MP_L dL = -MP_K dK$$
$$\frac{dK}{dL} = -\frac{MP_L}{MP_K} = M_{TS}$$

Şimdi bu formülü kullanarak Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun genel biçimi için marjinal ikame oranını belirleyelim.

$Q = AL^{\alpha}K\beta$

$$M_{TS} = \frac{dK}{dL} = -\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{A\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}} = -\frac{\alpha K^{\beta-1}K^{-\beta+1}}{\beta L^{\alpha}L^{-\alpha+1}} = -\frac{\alpha K}{\beta L}$$

Üretim Fonksiyonunun Homojenliği ve Ölçeğe Göre Getiri

$Q = f(K, L)$ biçimindeki bir üretim fonksiyonunda, herhangi bir n sayısı için $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^n f(K, L)$ ise fonksiyonun homojen olduğu söylenir. Hem sermaye hem de emek girdisi λ ile çarpıldığında, λ'yı ortak çarpan olarak fonksiyonun dışına çıkartabiliriz. λ'nın kuvveti olan n fonksiyonun homojenlik derecesidir. Homojenlik derecesi bize ölçeğe göre getiri konusunda bilgi vermektedir.

$n = 1$ ise fonksiyon ölçeğe göre sabit getiri sergiler. Yani girdilerdeki artış oranı ile çıktıdaki artış oranı aynıdır.

$n < 1$ ise fonksiyon ölçeğe göre azalan getiri sergiler. Yani girdiler belli bir oranda arttırıldığında, çıktıdaki artış bundan daha az olur.

$n > 1$ olduğunda fonksiyon ölçeğe göre artan getiri sergiler. Yani girdiler belli bir oranda arttırıldığında, çıktıdaki artış, bundan daha fazla olur.

Üretim fonksiyonlarının iktisatta çok sık kullanılan özel bir türü Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur ve $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ şeklinde gösterilir. Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun $\alpha + \beta$ derecesinde homojen olduğunu rahatlıkla gösterebiliriz. $f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$dir. Burada K ve L yerine λK ve λL yazarsak

$$\begin{aligned} f(\lambda K, \lambda L) &= A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} \\ &= A\lambda^{\alpha}K^{\alpha}\lambda^{\beta}L^{\beta} \\ &= \lambda^{\alpha+\beta}(AK^{\alpha}L^{\beta}) \\ &= \lambda^{\alpha+\beta}f(K, L) \end{aligned}$$

Dolayısıyla Cobb-Douglas üretim fonksiyonunda ölçeğe göre getiriler de şöyle olur:

$\alpha + \beta < 1$ ise ölçeğe göre azalan getiri
$\alpha + \beta = 1$ ise ölçeğe göre sabit getiri
$\alpha + \beta > 1$ ise ölçeğe göre artan getiri

Örnek: $Q = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonu kaçıncı dereceden homojendir. Bu fonksiyonda ölçeğe göre getiri hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Çözüm: $f(\lambda K, \lambda L) = 2(\lambda K)^{1/2}(\lambda L)^{3/2} = 2\lambda^2K^{1/2}L^{3/2} = \lambda^2 f(K, L)$
$2 > 1$ ise ölçeğe göre artan getiridir.

Euler Teoremi

Homojen fonksiyonların sonuçları ile ilgili geliştirilen önemli fonksiyonlardan biri de Euler teoremidir. Buna göre $K\frac{\partial f}{\partial K} + L\frac{\partial f}{\partial L} = nf(K, L)$ dir.

Dolayısıyla birinci dereceden homojen bir fonksiyon için eşitliğin sağ tarafı toplam çıktı miktarını verir. Böyle bir fonksiyonda sermaye ile sermayenin marjinal ürününü çarpıp buna emek ile emeğin marjinal ürününün çarpımını eklersek bize toplam çıktı miktarını verecektir.

Örnek: $Q = K^2 + 2L^2$ şeklindeki bir üretim fonksiyonuna Euler Teoremi'ni uygularsak

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = K \cdot 2K + L \cdot 4L = 2K^2 + 4L^2 = 2(K^2 + 2L^2) = 2Q$$

olur. Buna göre bu üretim fonksiyonunun homojenlik derecesi 2'dir.

Azalan Marjinal Ürün

Bir üreticinin hangi koşullarda üretimini sürdürdüğünü kısmi türevleri kullanarak özetleyebiliriz. Normal olarak bir üretici, girdi miktarı arttığında çıktının da artmasını ister. Bunun için emeğin ve sermayenin marjinal ürününün pozitif olması gerekir.

Ancak bir girdinin kullanım miktarı artmaya devam ederse çıktıdaki artış hızı genellikle azalır. Yani çıktı artmaya devam eder ancak azalarak artar. Bu durum da ikinci dereceden kısmi türevin negatif olması ile gösterilir. Kısaca

Emek girdisi için $MP_L \frac{\partial Q}{\partial L} > 0$ ve $\frac{d(MP_L)}{dL} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$

Sermaye girdisi için $MP_K \frac{\partial Q}{\partial K} > 0$ ve $\frac{d(MP_K)}{dK} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$

Örnek: $Q = K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{1}{2}}$ şeklindeki bir üretim fonksiyonunda bu kuralın geçerli olup olmadığını inceleyelim. Öncelikle emeğin marjinal ürününü belirleyelim.

$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{2}K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt[6]{K}}{\sqrt{L}} > 0$ Emeğin marjinal ürünü her zaman pozitiftir. Yani kullanılan emek miktarı arttıkça üretim düzeyi de artar. Şimdi de fonksiyonun ikinci dereceden kısmi türevini alalım.

$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right) = \frac{1}{4}K^{\frac{1}{6}}L^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt[6]{K}}{\sqrt{L^3}} < 0$ Yani emeğin marjinal ürünü azalmaktadır. Bunun nedeni de sermaye düzeyi sabitken emek girdisinin arttırılması sonucunda çıktıda meydana gelen artışın öncekilere göre daha az olmasıdır.

Aynı şey sermaye girdisi için de geçerlidir.

Kâr Fonksiyonu

Ticari işletmenin nihai amacı kârını maksimize etmektir. Üretimde kullanılan sermaye ve emek girdilerinin bir fonksiyonu olarak üretim fonksiyonunun $Q = K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{1}{2}}$ şeklinde olduğunu varsayalım. Firma sermaye $(K \geq 0)$ ve emeğin $(L \geq 0)$ çeşitli bileşimlerini kullanarak belli bir üretim $(Q \geq 0)$ gerçekleştirmektedir.

Bu firmanın ürün ve faktör piyasalarında fiyat alıcısı olduğunu varsayalım. Eğer üretilen ürünün fiyatı P, sermayenin fiyatı olan faiz r ve emeğin fiyatı olan ücret oranı w ile gösterilirse, K birim sermaye ve L birim emek kullanan firmanın kâr fonksiyonu

$$\begin{aligned}\Omega(K,L) &= T_R - TC \\ &= PQ - rK - wL \\ &= PK^{\frac{1}{6}}L^{\frac{1}{2}} - rK - wL\end{aligned}$$

olur. Verilen herhangi fiyat, faiz ve ücret değerleri için, değerler yerlerine koyularak kâr fonksiyonu belirlenebilir. Örneğin $P = 12, r = 1$ ve $w = 1$ için kâr fonksiyonu $\Omega(K,L) = 12K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{1}{2}} - K - 3L$ dir.

MARJİNAL FONKSİYONLARIN İNTEGRALE UYGULAMASI

Bir firmanın maliyet fonksiyonun türevinin marjinal maliyet fonksiyonu olduğunu biliyoruz. Buna göre firmanın maliyet fonksiyonu

$$M_C(x) = \int M'_C(x)dx$$

olur. $x = -x_1$ birimlik üretimden $x = -x_2$ birimlik üretime geçildiğinde yapılacak fazla maliyet

$$\int_{x_1}^{x_2} M'_C(x)dx$$

olur.

Örnek: Bir firmanın sabit maliyeti 500 birim olmak üzere maliyet fonksiyonu $M'_C(x) = 5x + 30$ olsun. Maliyet fonksiyonu bularak üretim $x = 10$ birimden $x = 30$ birime çıkarıldığında yapılacak fazla maliyeti bulalım. Firmanın maliyet fonksiyonu

$$M_C(x) = \int 5x + 30dx = \frac{5}{2}x^2 + 30x + c$$

olur. Bu durumda $x = 0$ için $M_C(0) = 500$ olması gerektiğinden

$$500=\frac{5}{2}0^2+30.0+c$$
$$c=500$$

dir. Böylece maliyet fonksiyonu

$$M_C(x)=\frac{5}{2}x^2+30x+500$$

olur. Şimdi üretimin $x = 10$ birimden $x = 30$ birime çıkarıldığında yapılacak fazla maliyeti bulalım.

$$\int_{10}^{30} M_C'(x)dx=\int_{10}^{30} 5x+30dx=\left(\frac{5}{2}x^2+30x\right)\Bigg|_{10}^{30}=2600$$

olur. //

Bener şekilde bir firmanın gelir fonksiyonunun türevinin marjinal gelir fonksiyonu olduğunu biliyoruz. Buna göre firmanın gelir fonksiyonu

$$M_R(x)=\int M_R'(x)\,dx$$

olur. $x = x_1$ birimlik satıştan $x = x_2$ birimlik satışa geçildiğinde elde edilecek gelir

$$\int_{x_1}^{x_2} M_R'(x)dx$$

olur. Diğer yandan kâr fonksiyonu $P(x)$ olmak üzere marjinal kâr fonksiyonu

$$K'(x) = M_R'(x) - M'_C(x)$$

olduğundan firmanın kar fonksiyonu

$$K(x)=\int K'(x)\,dx=\int M_R'(x)-M_C'(x)\,dx$$

olur. Buna göre $x = x_1$ birimlik satıştan $x = x_2$ birimlik satışa geçildiğinde elde edilecek kâr

$$\int_{x_1}^{x_2} P'(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}(M_R'(x)-M_C'(x))dx$$

olur.

ALIŞTIRMALAR

1. $M_R(x) = 25x + 10, 0 \le x \le 50$ şeklinde verilen toplam gelir fonksiyonunun artan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) (0, 20) B) (0, 25) C) (25, 50) D) (0, 50) E) (20, 50)

2. $M_C(x) = 0{,}4x^2 + 4x + 5, 0 \leq x \leq 5$ şeklinde verilen maliyet fonksiyonunun $x = 10$ ürün değerindeki marjinal maliyeti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

3. $M_R(x) = -4x^2 + 16x + 25, 0 \leq x \leq 80$ şeklinde verilen gelir fonksiyonunun marjinal gelir fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $M_R'(x) = -8x + 16$ B) $M_R'(x) = -8x$ C) $M_R'(x) = 16$
D) $M_R'(x) = 8x + 16$ E) $M_R'(x) = 0$

4. Bir üreticinin toplam maliyet fonksiyonu $M_C(x) = \frac{2x^2}{x+4} + 1\,000$ olarak verilmektedir. Marjinal maliyet fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $C'(x) = \frac{x+16}{(x+4)^2}$ B) $C'(x) = \frac{2x(x+16)}{(x+4)^2}$ C) $C'(x) = \frac{2x^2+16}{(x+4)^2}$
D) $C'(x) = \frac{2x}{x+4}$ E) $C'(x) = 1$

5. Toplam gelir fonksiyonu $M_R(x) = -0{,}01x^2 + 30x$ ve toplam maliyet fonksiyonu $M_C(x) = 10x + 30$ ise, kârın maksimum olduğu nokta aşağıdakilerden hangisidir?

A) (200, 1 000) B) (300, 1 000) C) (100, 990)
D) (1 000, 9970) E) (1 2000, 10 000)

Cevap Anahtarı
1.D, 2.E, 3.A, 4.B, 5.D

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Analiz Ders Notları, Osmangazi Üniversitesi, 2012, Eskişehir.
2. Komisyon, Matematiksel İktisat, Anadolu Üniversitesi, 2012, Eskişehir.

3. Arş. Gör. Sefa ERKUŞ, Matematiksel İktisat Ders Notları, Karabük Üniversitesi, 2012, Karabük.