4. BÖLÜM
ÜÇ KATLI İNTEGRALLER

ÜÇ KATLI İNTEGRAL KAVRAMI

Üç katlı integraller, integrasyon bölgesi üç boyutlu uzayda bir bölge olan integrallerdir.

4.1. Tanım: Üç değişkenli bir fonksiyonda tanım kümesi bir hacimli bölge veya hacimli bölgenin alt kümeleridir. Bu bölge

$$D=\{(x,y):a\le x\le b,c\le y\le d,e\le z\le f\}$$

veya

$$D=\{(x,y):a\le x\le b,c(x)\le y\le d(x),e(x,y)\le z\le f(x,y)\}$$

ile gösterirsek üç değişkenli fonksiyonun hem x'e hem y'ye hem'de z'ye göre integrallerinin alınmasına f fonksiyonun üç katlı integrali denir ve $dV=dx\,dy\,dz$ olmak üzere $I=\iiint\limits_D f(x,y)\,dV$ biçiminde gösterilir. Bu integrali alınırken iç kısmından dışa doğru kısmi türev uygulanır.

Eğer D bölgesinin parçalanması koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle yapılırsa $\Delta V_k=\Delta x_k.\Delta y_k.\Delta z_k$ olacağından, yukarıdaki integral

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

biçiminde de yazılabilir.

Toplam sembolünün ve limitinin özelliklerinden yararlanarak, üç katlı integrallerin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolayca gösterilir.

i) $\iiint\limits_D k.f(x,y,z)dV=k.\iiint\limits_D f(x,y,z)dV$

ii) $\iiint\limits_D f(x,y,z)+g(x,y,z)dV=\iiint\limits_D f(x,y,z)dV+\iiint\limits_D g(x,y,z)dV$

iii) D üzerinde $f(x,y,z)\ge 0$ ise $\iiint\limits_D f(x,y,z)dV\ge 0$ dir.

iv) D üzerinde $f(x,y,z)\ge g(x,y,x)$ ise $\iiint\limits_D f(x,y,z)dV\ge\iiint\limits_D g(x,y,z)dV$ dir.

v) $D=D_1\cup D_2$ ve $D_1\cap D_2=\varnothing$ ise

$$\iiint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{D_1} g(x,y,z)dV + \iiint\limits_{D_2} g(x,y,z)dV$$

dir. //

Eğer D bölgesi alttan $z = g(x,y)$ ve üstten $z = g(x,y)$ yüzeyi ve D bölgesinin $xy-$düzlemindeki dik izdüşümü D_1 ise;

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_1} \left[\int\limits_{z=g(x,y)}^{z=h(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx\,dy$$

biçiminde olur.

Örnek: $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 3, 2 \le z \le 4\}$ olduğuna göre

$$I = \iiint\limits_{D} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $I = \iiint\limits_{D} (x+y+z)\,dz\,dy\,dy$

$$= \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=1}^{3} \int\limits_{z=2}^{4} (x+y+z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=1}^{3} \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_2^4 dy\,dx$$

$$= \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=1}^{3} (4x+4y+8)\,dy\,dx$$

$$= \int\limits_{x=0}^{2} \left(4xy + 2y^2 + 8y\right)\Big|_1^3 dx$$

$$= \int\limits_{x=0}^{2} \left(4xy + 2y^2 + 8y\right)\Big|_1^3 dx$$

$$= \int\limits_{x=0}^{2} (8x-30)\,dx$$

$$= (4x^2 - 30x)\Big|_0^2$$

$$= -44$$

Örnek: $x+y+z = a, (a>0), x = 0, y = 0, z = 0$ tarafından sınırlanan bölgede;

$$I = \iiint\limits_{D} x\,dz\,dy\,dx$$

integralini bulunuz.

Çözüm: $$I=\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\int_{z=0}^{a-x-y} x\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x} xz\Big|_0^{a-x-y}\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x} x(a-x-y)\,dy\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{a}\left(axy-x^2y-\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_0^{a-x} dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{a}\left(ax(a-x)-x^2(a-x)-\frac{x(a-x)^2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_{x=0}^{a}\left(3a^2x-2ax^2+2x^2-x^3\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3a^2x^2}{2}-\frac{2ax^3}{3}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{a}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{5a^4}{4}-\frac{2a^4}{3}+\frac{2a^3}{3}\right)$$

Örnek: Alttan $z=3$ düzlemi, üstten $z=x^2+y^2+4$ paraboloidi, yandan $x^2+y^2=1$ silindiri sınırlanan bölge üzerinde $I=\iiint_D xyz\,dz\,dy\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Veriye göre silindirin alt sınır $z=3$ ve üst sınırı $z=x^2+y^2+4$ olduğundan

$$I=\iint_{D_1}\left[\int_{z=3}^{x^2+y^2+4} xyz\,dz\right]dx\,dy$$

$$=\iint_{D_1}\frac{xy}{2}\left[(x^2+y^2+4)^2-9\right]dx\,dy$$

olur. Burada D_1 bölgesi D bölgesinin xy - düzlemindeki izdüşümü olan $x^2+y^2\le 1$ dairesidir. Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$I=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta[(r^2+4)^2-9]r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\sin\theta\cos\theta(r^6+8r^4+7r^2)\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\left(\frac{r^7}{7}+\frac{8r^5}{5}+\frac{7r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 d\theta$$

$$=\frac{214}{105}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{108}{105}\sin^2\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$=0$$

bulunur.

ÜÇ KATLI DÖNÜŞÜMLERİN BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

xyz koordinat sistemindeki bir D bölgesi, $u=f(x,y,z)$, $v=g(x,y,z)$, $w=h(x,y,z)$ bölge dönüşümü ile bir R bölgesine dönüştürüldüğünde

$$\Delta V_{(u,v,w)}=\left|\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}\right|\Delta V_{(x,y,z)}$$

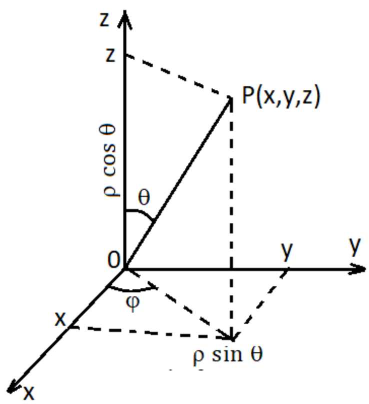
olacağından

$$\iiint_D T(u,v,w)=\iiint_R T(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z))\left|\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}\right|dV$$

olacaktır.

Üç boyutlu uzayda iki önemli bölge dönüşümü vardır. Şimdi bu iki dönüşümü verelim.

1. KÜRESEL KOORDİNATLAR



xyz koordinat sisteminde bir P(x, y, z) noktası verilmiş olsun. P noktasının orijine olan uzaklığı ρ, OP doğru parçasının z – ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü θ olsun. OP doğru parçasının xy düzlemindeki dik izdüşümü $[OP']$ ve $[OP']$ doğru parçasının x – ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü φ olsun.

$$|OP'| = \rho \sin\theta$$

olduğundan

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

olur. Böylece xyz – koordinat sisteminden $\rho\theta\varphi$ koordinat sistemine bir bölge dönüşümü elde edilmiş olur. Bu durumda P noktasının $\rho\theta\varphi$ – sistemindeki koordinatları (ρ, θ, φ) olur. Bu sayılara P noktasının küresel koordinatları adı verilir.

Örnek: Kartezyen koordinatları $P(3, \sqrt{3}, 2)$ olan noktanın küresel koordinatları bulunuz.

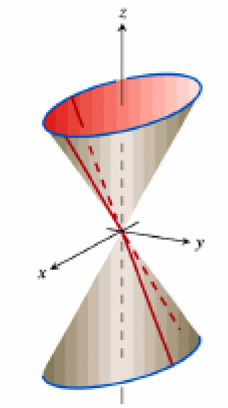
Çözüm: $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 + \sqrt{3}^2 + 2^2 = 16$ ise $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4$

$$z = \rho\cos\theta \Leftrightarrow 2 = 4\cos\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{y}{x} = \tan\varphi \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\varphi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

bulunur. Buna göre P noktasının küresel koordinatları $P\left(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ olacaktır.

Örnek: Kartezyen koordinat sistemindeki denklemi $z^2 = x^2 + y^2$ olan koninin küresel koordinatlar sistemindeki denklemini bulunuz.



Çözüm: x,y,z koordinatlarının küresel koordinat sistemindeki değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$\rho^2\cos^2\theta = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = \rho^2\sin^2\theta$$

$$|\cos\theta| = |\sin\theta|$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ veya } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

olur. $\theta = \frac{\pi}{4}$ koninin üst yarısının, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ koninin alt yarısının denklemidir.

Genel olarak, $\theta = \alpha$ denklemi ana doğrusu $z-$ekseniyle α kadar açı yapan koninin denklemidir.

Örnek: Küresel koordinat sistemindeki denklemi $\rho = 2$ olan yüzeyin kartezyen koordinat sistemindeki denklemini yazınız.

Çözüm: $\rho = 2$ ise $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 4$ olur. Bu yarıçapı 2 birim olan merkezcil kürenin denklemidir.

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

olur. Bu determinant açılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\theta$$

bulunur. Buna göre;

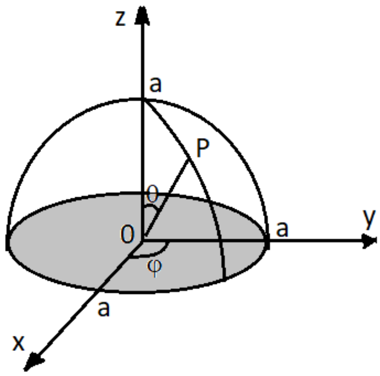
$$\iiint_D f(x,y,z) = \iiint_R f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2|\sin\theta|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

olur.

Not: İntegrasyon bölgenin bir küre parçası halinde küresel koordinatları kullanmak yararlıdır.

Örnek: $I = \int_{-a}^{5}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{25\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$ integralini küresel koordinatlara çevirerek bulunuz.

Çözüm: Verilen integralin integrasyon bölgesi, 5 yarıçaplı merkezli kürenin üst yarısıdır.



Yarım küre içindeki bir noktanın orijine olan uzaklığı 0 dan 5'e kadar değişebileceğinden $0 \le \rho \le 5$ dir.

Bir ucu O orijinde ve uzunluğu 5 kadar olan doğru parçasının z – ekseni ile yaptığı açının ölçüsü θ olsun. θ, sıfırdan $\frac{\pi}{2}$ ye kadar değişirse P doğrusu bir çeyrek daire kadar tarama yapar. Eğer bu çeyrek daire z – ekseni etrafından 2π kadar döndürülürse yani, φ sıfırdan 2π kadar değiştirilirse bir yarım küre oluşur. Şu halde küresel koordinatların değişim aralıkları

$$0 \le \rho \le 5,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

olacaktır. Buna göre

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{5} (\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)\rho^2 |\sin\theta| d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{5} \rho^4 \sin^3\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\rho^5}{5} \sin^3\theta \Big|_0^5 d\theta\, d\varphi$$

$$= 625 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 625 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 - \cos^2\theta) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 625 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta \right)\Big|_0^{\pi/2} d\varphi$$

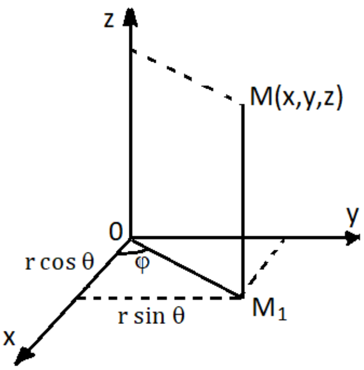
$$= 625 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{2}{3} d\varphi$$

$$= \frac{250}{3} \varphi\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{500}{3}\pi$$

olur.

2. SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR



xyz koordinat sisteminde bir M(x, y, z) noktası verilmiş olsun. MP noktasının xy – dik izdüşümü M_1 ve M_1 noktasının xy – düzlemindeki kutupsal koordinatlar (r,θ) olsun. Buna göre

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

olur. Bu dönüşümün Jakobiyen determinantı

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

olduğundan

$$\iiint\limits_D f(x,y,z) = \iiint\limits_R f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

olur.

İntegral bölgesinin bir silindir parçası olması halinde silindirik koordinatları kullanmak yararlıdır.

Örnek: $I = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z(x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx$ integralini silindirik koordinatlara çevirerek bulunuz.

Çözüm: İntegrasyon bölgesi, alttan $z=0$ olup xy – düzlemi üstten $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi, yandan $x^2+(y-1)^2=1$ silindiri tarafından sınırlanan bölgedir.

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ ise $z=\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}=\rho$

$x^2+(y-1)^2=1$ ise $x^2+y^2=2y \Leftrightarrow \rho^2=2\rho\sin\theta \Leftrightarrow \rho=2\sin\theta$

olur. Buna göre $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisinin silindirik koordinatlardaki denklemi $z=\rho$, $x^2+(y-1)^2=1$ silindirinin denklemi $\rho=2\sin\theta$ olur. Bu durumda,

$$I=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{2\sin\theta}\int_{z=0}^{\rho} z.\rho^2.\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{2\sin\theta}\left.\frac{\rho^3z^2}{2}\right|_0^{\rho} d\rho\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{2\sin\theta}\frac{\rho^5}{2}\,d\rho\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi}\left.\frac{\rho^6}{12}\right|_0^{2\sin\theta} d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_{\theta=0}^{\pi}(\sin^2\theta)^3\,d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^3 d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\theta=0}^{\pi}(1-3\cos 2\theta+3\cos^2 2\theta-\cos^3 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\left(\pi+0+\frac{3\pi}{2}-0\right)$$

$$=\frac{5}{3}\pi$$

bulunur.

HACİM HESAPLARI

4.1. Teorem: $D\subset\mathbb{R}^3$, xyz koordinat sisteminde bir bölge ve f de bu bölge üzerinde sınırlı bir f fonksiyon olsun.

$$f: D\to\mathbb{R},\ z=f(x,y)$$

üç değişkenli fonksiyonu verilsin. Bu bölgenin hacmi

$$\text{Hacim(H)} = \iiint\limits_{D} dz\,dy\,dx$$

dir.

İspat: $\delta = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$, D bölgesinin bir parçalanması; (x_k, y_k, z_k), D_k nın herhangi bir noktası, ΔV_k da D_k bölgesinin hacmi olsun. Eğer

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

limiti varsa bu limit Reamann anlamında integrallenebilmeden f'nin D üzerinde integralini gösterir.

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \iiint\limits_{D} f(x,y,z)dV$$

olur. Eğer D bölgesinin parçalanması koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle yapılırsa $\Delta V_k = \Delta x_k . \Delta y_k . \Delta z_k$ olacağından, yukarıdaki integral

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

biçiminde de yazılabilir. Her $(x,y,z) \in D$ için $f(x,y,z) = 1$ alındığında D bölgesinin hacmini vereceğinden

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \iiint\limits_{D} dV$$

ile gösterilir. // Eğer,

i) Hacim küresel koordinatlarda;

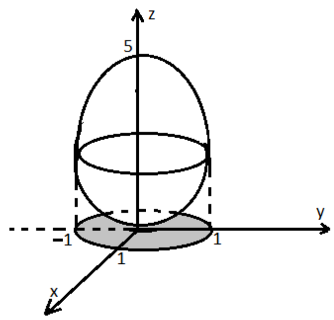
$$V = \iiint\limits_{D} \rho^2 |\sin\theta| d\rho\, d\theta\, d\phi$$

ii) Silindirik koordinatlarda;

$$V = \iiint\limits_{D} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

denklemi ile bulunur.

Örnek: $z = 5 - x^2 - y^2$ ve $z = 4x^2 + 4y^2$ parabolidleri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.



Çözüm: Verilen bölgenin xy – düzlemi üzerindeki dik izdüşümü $x^2+y^2\le 1$ dairesidir.

Silindirik koordinatlara geçilirse, $x^2+y^2=\rho^2$ olduğundan,

$$V=\iiint\limits_D \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{4\rho^2}^{5-\rho^2}\rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho z\Big|_{4\rho^2}^{5-\rho^2} d\rho\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho(5-\rho^2-4\rho^2)\, d\rho\, d\theta$$

$$=5\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 d\theta$$

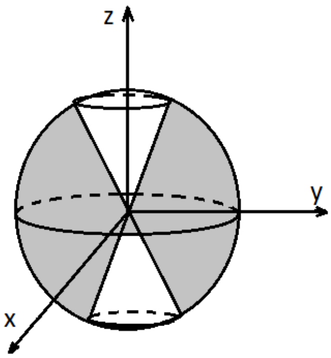
$$=\frac{5}{4}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$=\frac{5}{4}\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{5}{2}\pi\, br^3$$

olur.

Örnek: $x^2+y^2+z^2=25$ küresinin içinde, $3z^2=x^2+y^2$ konisinin dışında kalan bölgenin hacmini bulunuz.



Çözüm: Önce koninin küresel koordinatlardaki denklemini bulalım.

$$3z^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow 3\rho^2\cos^2\theta=\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\theta = 3$$
$$\Leftrightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ ve } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

ve

$$V = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\int_0^5 \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\rho^3}{3}\sin\theta \Big|_0^5 \, d\theta \, d\varphi$$
$$= \frac{125}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$
$$= \frac{125}{3}\int_0^{2\pi} \cos\theta\Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} \, d\varphi$$
$$= \frac{125}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi$$
$$= \frac{125}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}$$
$$= \frac{250}{3}\pi \text{ br}^3$$

olur.

KAYNAKÇA

- Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim kitap kırtasiye A.Ş., Ankara, 1997.
- Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
- Murray R. SPIEGEL, Çeviri: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Nobel Yayın Dağıtım, 1997.
- Prof. Dr. Vakıf CAFEROV, Matematik, Açıköğretim Fakültesi Yayınları, Eskişehir, 2009.
- George B. Thomas, Çeviri Recep Korkmaz, Thomas Calculus II, Beta, İstanbul, 2009.