

BÖLÜM 5

NÜMERİK TÜREV

5.1 GİRİŞ

$f(x)$ fonksiyon tablo ile verildiğinde veya x ve $f(x)$ arasındaki fonksiyonel bağıntı yeterli kadar karma ise, bu taktirde nümerik türev bulma önemli olmaktadır. 1. durumda diferansiyel hesap formülleri sadece geçerli değildir. 2. durumda ise bu metotların uygulaması yeterince zor işlemler gerektirir. Bu durumlarda $f(x)$ fonksiyonu yerine $j(x)$ interpolasyon fonksiyonu kullanılır ve $f(x)$ in türevinin değeri $j(x)$ in türevinin değerine tahmini olarak eşit kabul edilir. Tabii ki belli hata oluşumunda söz konusu oluyor. $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = j(x) + R(x) \quad (1)$$

şeklinde ele alınabilir. Burada $j(x)$ interpolasyon fonksiyonu, $R(x)$ ise bu denklemin kalan terimidir. Bu eşitliği k defa diferansiyellersek (türevlerin mevcut olduğu varsayılmaktadır)

$$f^{(k)}(x) = j^{(k)}(x) + R^{(k)}(x) \quad (2)$$

elde edilecektir. $f(x)$ fonksiyonu yerine $j(x)$ interpolasyon fonksiyonu ele alındığında ortaya çıkan $R(x)$ kalan teriminin sonsuz küçük olduğu varsayılır. Fakat bu $R^{(k)}(x)$ in de sonsuz küçük olacağı anlamına gelmez.

Bunu bir örnekle izah edelim.

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

olsun. Burada $x(t) \in C_1[a, b]$ olsun. Bu taktirde $x(t) \in C_2[a, b]$ olacaktır. Bu uzayların her birinde iki fonksiyon arasındaki uzaklığı (normu)

$$\rho(x_1(t), x_2(t)) = \max_{[a, b]} |x_1(t) - x_2(t)|$$

şeklinde tanımlayalım. C_1 uzayında

$$x_1(t) \text{ ve } x_2(t) = x(t) + \frac{1}{n} \sin(n^2(x - a))$$

funksiyonlarını ele alalım. Bu fonksiyonlar arasındaki uzaklık. Yani

$$\rho(x_1(t), x_2(t)) = \max_{[a, b]} \left| \frac{1}{n} \sin^2 n(x - a) \right| = \frac{1}{n}$$

büyüklüğü büyük n ler için yeterince küçük yapılabilir. Fakat

$$y_2(t) = \frac{d}{dt} [x(t) + \frac{1}{n} \sin(n^2(x - a))] = y_1(t) + n \cos(n^2(x - a))$$

olduğu için

$$\rho(y_1(t), y_2(t)) = \max_{[a,b]} |n \cos^2(x-a)| = n$$

olacaktır. Dolayısıyla C_1 uzayında ele alalım birbirine yakın $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ fonksiyonları verildiğinde, onların türevleri arasındaki uzaklığın küçük olacağı söylenemez.

Tam tersi: istenilen büyük sayıdan büyük yapılabilir. Bu nedenle C_2 sınıfında diferansiyelleme problemi kararlı değildir denir.

TAYLOR SERİ AÇILIMLARINI KULLANARAK SONLU FARK YAKLAŞIMLARI

$f(x)$ fonksiyonun türevlerinin sonlu fark yaklaşımlarıyla türetilmesi x civarında $f(x)$ in ileri ve geri Taylor seri açılımlarından yararlanarak yapılır. Bu açılımları aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(IV)}(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(IV)}(x) + \dots$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(IV)}(x) + \dots$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2h f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(IV)}(x) + \dots$$

bu serileri alt alta toplayıp çıkarırsak aşağıdaki serileri elde ederiz;

$$f(x+h) + f(x-h) = 2 \left[f(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(IV)}(x) + \frac{h^6}{6!} f^{(VI)}(x) + \dots \right]$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2 \left[h f'(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(V)}(x) + \frac{h^7}{7!} f^{(VII)}(x) + \dots \right]$$

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2 \left[f(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots \right]$$

$$f(x+2h) - f(x-2h) = 2 \left[h f'(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \dots \right]$$

iki serinin toplamlarında sadece çift mertebeli türevler içerirken farklarda ise sadece tek mertebeli türevler içermektedir. Yukarıdaki bu denklemlerin ifadelerini $f(x)$ in değişik türevlerini bulmak için kullanabiliriz.

MERKEZİ FARK TÜREV YAKLAŞIMLARI

$f(x + h) - f(x - h)$ denklemin de $f'(x)$ yalnız bırakılırsa

$$f(x + h) - f(x - h) = 2hf'(x) + 2 \left[\frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(V)}(x) + \frac{h^7}{7!} f^{(VII)}(x) \dots \right]$$

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{2}{h} \left[\frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(V)}(x) + \frac{h^7}{7!} f^{(VII)}(x) \dots \right]$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{2}{h} \left[\frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(V)}(x) + \frac{h^7}{7!} f^{(VII)}(x) \dots \right]$$

bulunur. Denklemin sadece ilk terim alınır,

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - O(h^2) \quad (3)$$

$f'(x)$ için merkezi fark türev yaklaşımını elde ederiz.

$f(x + h) - f(x - h)$ denklemin de $f''(x)$ yalnız bırakılırsa

$$f(x + h) + f(x - h) = 2f(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + 2 \left[\frac{h^4}{4!} f^{(IV)}(x) + \frac{h^6}{6!} f^{(VI)}(x) \dots \right]$$

$$f(x + h) + f(x - h) - 2f(x) - 2 \left[\frac{h^4}{4!} f^{(IV)}(x) + \frac{h^6}{6!} f^{(VI)}(x) \dots \right] = h^2 f''(x)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} - \frac{2}{h} \left[\frac{h^4}{4!} f^{(IV)}(x) + \frac{h^6}{6!} f^{(VI)}(x) \dots \right]$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} - O(h^4) \quad (4)$$

$f''(x)$ için merkezi fark türev yaklaşımını elde ederiz.

$f(x + h) - f(x - h)$ ni -2 ile çarpılıp denklem $f(x + 2h) - f(x - 2h)$ ile toplanır ve gerekli düzenlemelerde yapılırsa $f''(x)$,

$$f'''(x) = \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)}{2h^3} - O(h^2) \quad (5)$$

bulunur.

Benzer tarzda, denklem $f(x + h) + f(x - h)$ denklemini -4 ile çarpılıp, $f(x + 2h) + f(x - 2h)$ ile toplanır ve düzenlenirse $f^{(IV)}$ türev denklemi

$$f^{(IV)}(x) = \frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4} - O(h^2) \quad (6)$$

bulunabilir.

$f(x+h) - f(x-h)$ denklemini -8 ile çarpılıp $f(x+2h) - f(x-2h)$ denklemini ile toplanır ve gerekli düzenlemelerde yapılırsa $f'(x)$,

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)-f(x-2h)}{12h} - O(h^4)$$

elde edilir.

Örnek: $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun değerlerinden yararlanarak $h = 0,01$ için $f'(1)$ in yaklaşık değerini Merkezi fark denklemleriyle bulunuz. $f'(1) = \cos 1 = 0,540302$ tam değeriyle bulduğunuz değeri karşılaştırınız. (Buradaki 1 değeri radyan türündendir.)

Çözüm: Önce $O(h^2)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

denklemine göre

$$\begin{aligned} f'(1) &\approx \frac{f(1+0,01)-f(1-0,01)}{2 \cdot 0,01} \\ &= \frac{\sin 1,01 - \sin 0,99}{0,02} \\ &= 0,540293 \end{aligned}$$

bu durumda virgülden sonra üç basamak için sonuç doğru olmaktadır. Şimdi de $O(h^4)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım.

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)-f(x-2h)}{12h}$$

denklemine göre

$$\begin{aligned} f'(1) &\approx \frac{-f(1+2 \cdot 0,01)+8f(1+0,01)-8f(1-0,01)+f(1-2 \cdot 0,01)}{12 \cdot 0,01} \\ &= \frac{-\sin 1,02+8 \sin 1,01-8 \sin 0,99-\sin 0,98}{0,12} \\ &= -0,540302 \end{aligned}$$

bulunur. Burada virgülden sonraki altı basamakta doğru çıktığı görülür.

İLERİ FARK TÜREV YAKLAŞIMLARI

Merkezi sonlu fark yaklaşımları her zaman kullanılamaz. Örneğin n farklı $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktaları için değerleri verile $f(x)$ fonksiyonunu ele alalım, merkezi farklarda x in her iki tarafındaki değerlerini kullandığımızdan x_1 ve x_n noktalarında ve de uçlara yakın diğer değerlerde fonksiyonun türevlerini bulamayız. Böyle bir durumlarda x 'in sadece bir tarafının değerlerine ihtiyaç duyarız. Bu tip durumlar için ileri ve geri fark yaklaşımları gerekecektir. Baştaki x değerleri için kullanabileceğimiz ileri fark yaklaşımlarının nasıl bulunduğunu birkaçı için göstereyim.

Yukarıda verilen

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(IV)}(x) + \dots$$

Taylor açılımının da $f'(x)$ yalnız bırakılırsa ilk ileri fark yaklaşımını buluruz

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2!} f''(x) - \frac{h^2}{3!} f'''(x) - \frac{h^3}{4!} f^{(IV)}(x) + \dots$$

eşitliğin sağ tarafındaki sadece ilk terimi alırsak

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h) \quad (7)$$

denklemi bulunur. Bu denklem $O(h)$ hatası ile bulunur, tabii ki $O(h^2)$ hatası ile bulunan merkezi fark yaklaşımlarından daha sağlıklı sonuç vermez. Benzer tarzda ikinci türevi bulmak için, $f(x+h)$ denklemi -2 ile çarpılıp, $f(x+2h)$ denklemi ile toplanıp düzenlenirse

$$f''(x) = \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h} + O(h) \quad (8)$$

bulunur. Diğer üçüncü ve dördüncü türevleri benzer tarzda bulabiliriz.

Daha iyi bir yaklaşım sağlamak için $O(h^2)$ hatası ile türev denklemlerini bulalım, bunun için $f(x+h)$ denklemi ve $f(x+2h)$ kullanarak birinci türev elde edelim. Bunun için $f(x+h)$ denklemini -4 ile çarpıp $f(x+2h)$ denklemi ile toplayalım

$$f(x + 2h) - 4f(x + h) = -3f(x) - 2h f'(x) + \frac{2h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

daha sonra,

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h} - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h} + O(h^2) \quad (9)$$

elde edilir.

Benzer şekilde Taylor serileri açılımlarını kullanarak diğer türev ifadelerinin eşitlerini de bulabiliriz. Örneğin $f(x + h)$, $f(x + 2h)$ ve $f(x + 3h)$ Taylor açılımlarından $f''(x)$ i; $f(x + h)$, $f(x + 2h)$, $f(x + 3h)$ ve $f(x + 4h)$ Taylor açılımlarından yararlanarak da $f'''(x)$, v.s buluruz.

Örnek: $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun değerlerinden yararlanarak $h = 0,01$ için $f'(1)$ in yaklaşık değerini ileri fark denklemleriyle bulunuz. $f'(1) = \cos 1 = 0,540302$ tam değeriyle bulduğunuz değeri karşılaştırın. (Buradaki 1 değeri radyan türündendir.)

Çözüm: Önce $O(h)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(1) = \frac{f(1+0,01)-f(1)}{0,01} = \frac{\sin 1,51 - \sin 1}{0,01} = 0,536086$$

virgülden sonra tek basamak için sonuç doğrudur. Bu $O(h)$ hatası ile değerleri bulmamızdan kaynaklanmaktadır, zaten merkezi farktaki $O(h^2)$ hatasından daha iyi bir sonucun çıkması pek mümkün olamaz.

Şimdide $O(h^2)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h}$$

$$f'(1) \approx \frac{-f(1+2 \cdot 0,01)+4f(1+0,01)-3f(1)}{2 \cdot 0,01}$$

$$= \frac{-\sin 1,02 + 4 \sin 1,01 - 3 \sin 1}{0,02}$$

$$= 0,5$$

bulunur. Bu değerde merkezi fark formüllerinden daha iyi bir değer değildir.

GERİ FARK TÜREV YAKLAŞIMLARI

İleri fark yaklaşımındaki benzer yaklaşımlar burada da geçerlidir. Geri fark türev yaklaşımları da (x_n) ve ona yakın değerlerin türevlerini bulmak için kullanılır. $f(x-h)$ denklemin de $f'(x)$ yalnız bırakılırsa

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h)$$

bulunur. $f(x-h)$ denklemini ve $f(x-2h)$ denklemini kullanarak

$$f''(x) = \frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2} + O(h)$$

bulunur. Benzer işlemlerle diğer türev eşitlikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Örnek: $f(x) = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$ integralinin değerini fonksiyonunun değerlerinden yararlanarak $h = 0,01$ için $f'(0,5)$ in yaklaşık değerini geri fark formülleriyle bulunuz. $f'(0,5) = -\sin 0,5 = -0,479426$ tam değeriyle bulduğunuz değeri karşılaştırınız.

Çözüm: Önce $O(h)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım.

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

denklemine göre

$$f'(0,5) \approx \frac{f(0,5)-f(0,5-0,01)}{0,01} = \frac{\cos 0,5 - \cos 0,49}{0,01} = -0,475029$$

bu değerde virgülden sonra iki basamak için sonuç doğrudur. Bu $O(h)$ hatası ile değerleri bulmamızdan kaynaklanmaktadır, zaten merkezi farktaki $O(h^2)$ hatasından daha iyi bir sonucun çıkması pek mümkün olamaz. Şimdide $O(h^2)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım.

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h)-4f(x-h)+3f(x)}{2h}$$

denklemine göre

$$f'(0,5) \approx \frac{f(0,5-2 \cdot 0,01)-4 f(0,5-0,01)+3 f(0,5)}{2 \cdot 0,01}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos 0,48 - 4 \cdot \cos 0,49 + 3 \cdot \cos 0,5}{0,02} \\ &= -0,479441 \end{aligned}$$

bulunur. Bu değerde merkezi fark formüllerinden daha iyi bir değer değildir.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. İbrahim Uzun, Nümerik Analiz, Beta Basın A.Ş., 2012, İstanbul.
2. Prof. Dr. Mahmut Koçak, Analiz Ders Notları, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2016.
3. Prof. Dr. Nuri Özalp – Doç. Dr. Elif Demirci, Nümerik Analiz, Ward Cheney, David Kincaid, Gazi Yayınları, 2012, Ankara.
4. Doç. Dr. Arzu Erdem, Sayısal Analiz, Kocaeli Üniversitesi, Ders notları, 2013, Kocaeli.
5. Doç. Dr. Zekeriya Girgin, Sayısal Analiz, Pamukkale Üniversitesi, Ders notları, 2016, Denizli.
6. Yrd. Doç. Dr. İhsan Temuçin Dolapçı, Yrd. Doç. Dr. Yiğit Aksoy, Sayısal Yöntemler, Celal Bayar Üniversitesi, Ders notları, 2015, Manisa.
7. Yrd. Doç. Dr. Emel Yavuz Duman, Nümerik Analiz, İstanbul Kültür Üniversitesi, Ders notları, 2013, İstanbul.
8. Yasin Ortakçı, Karabük Üniversitesi, Sayısal Analiz Ders Notları, 2007, Karabük.