9. BÖLÜM
ÖZDEĞERLER ve ÖZVEKTÖRLER

ÖZDEĞER ve ÖZVEKTÖR KAVRAMI

Bazı vektörler bir $A_{n\times n}$ biçimindeki kare matrisi ile çarpıldıkları zaman yön değiştirir, bazıları ise değiştirmezler. Bazı özel $\vec{x}$ vektörleri, $A\vec{x}$ vektörü ile aynı yönde kalmaktadır. İşte bu vektörlere "özvektörler" diyeceğiz. Skaler ise özvektörün A matrisi ile çarpılması halinde elde edilen yeni vektörün uzunluğunun, orijinal x vektörüne göre büyüdüğü, küçüldüğü ya da aynı kalıp kalmadığı bilgisini vermektedir. Özdeğer ve özvektörlerin tanımını şu şekilde vereceğiz.

9.1. Tanım: T bir lineer dönüşüm, $\vec{x}$ bir sütun vektörü, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$T(\lambda) = \lambda\vec{x}$$

dönüşümünü sağlayan λ'ya özdeğer veya karakteristik değer, $\vec{x}$ vektörüne özvektör veya karakteristik vektör adı verilir.

Eğer özdeğer 0 ise, özvektör sıfır uzayında tanımlıdır. Eğer A birim matris ise, $I\vec{x} = \vec{x}$ olur. Bu durumda $n \times 1$ boyutlu tüm vektörler özvektördür ve A matrisinin tüm özdeğerleri $\lambda = 1$'dir.

Geometrik olarak; karakteristik vektör bir lineer dönüşüm altında doğrultusu değişmeyen vektörlerdir.

9.1. Teorem: n boyutlu bir reel vektör uzayı V ve $T: V \to V$ bir lineer dönüşüm olsun. Bir $\vec{x} \in V$ eğer özvektör ise bu vektöre karşılık gelen bir ve yalnız bir özdeğer vardır.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

9.2. Teorem: n boyutlu bir reel vektör uzayı V ve $T: V \to V$ bir lineer dönüşüm olsun. Bir $\lambda \in \mathbb{R}$ değerine karşılık gelen birden fazla karakteristik vektör vardır.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

9.2. Tanım: $A_{n\times n}$ matris, $I_{n\times n}$ birim matris ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A-\lambda I$ matrisine karakteristik matrisi denir. Buna göre karakteristik matris;

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}-\lambda I_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

biçiminde olur.

9.3. Tanım: $A_{n\times n}$ matris, $I_{n\times n}$ birim matris ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, verilen bir karekteristik matrisin determinantına T dönüşümün karakterisitik polinomu nedir?

$T(\lambda) = \det(A-\lambda I) = 0$

denkleminde λ, bir polinomu olup, bu polinoma T nin karakteristik polinomu denir.

9.1. Not: Bir $A_{n\times n}$ kare matrisinin özdeğerleri $\det(A-\lambda I) = 0$ ile tespit edilebilir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri;

Çözüm: $A-\lambda I=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A-\lambda I) = 0$

$$\left|\begin{matrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda \end{matrix} = 0$$

$(3-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2(3-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 3, \lambda_1 = \sqrt{3}, \lambda_1 = -\sqrt{3}$

9.3. Teorem: $A_{n\times n}$ bir kare matris, $\vec{x}$ bir sütun vektörü, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$(A-\lambda I)\vec{x}=0$$

dir.

İspat: λ , A'nın bir özdeğeri ve bu özdeğere karşı gelen bir vektörde x olsun.

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$$
$$A\vec{x}=(\lambda I)\vec{x}$$
$$(A-\lambda I)\vec{x}=0$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve bunlara karşı gelen özvektörleri bulunuz.

Çözüm: A nın karakteristik polinomu,

$$|A-\lambda I_3|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ -3 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$-\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda-12=0$$

olup bu denkleminin kökleri özdeğerlerdir. Bu denklemin kökleri 12 nin çarpanlarını denklemde deneyerek $\lambda=2$, $\lambda=3$, $\lambda=-2$ bulunur. Şimdi bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri bulalım:

λ özdeğerine karşı gelen x özvektörü (x_1,x_2,x_3) ise

$$(A-\lambda I)\vec{x}=0$$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ -3 & 1 & -1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

olur. $\lambda=2$ için

$$\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -3 & 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0, -3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$
homojen denklem sistemi elde edilir. Burada 1. denklem, 2. denklemin -1 katıdır, bu durumda
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, -3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$
üç bilinmeyenli iki denklemden oluşan sistemin çözümü için x_1 bilinmeyenini bilinen kabul edersek, sistemin çözümü
$$x_3 = -x_1 \text{ ve } x_2 = 0$$
bulunur. $x_1 = k$ alınırsa $x_3 = -k$ olacağından $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{bmatrix}$ bulunur. Böylece, $\lambda = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler $k \neq 0$ olmak üzere $\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{bmatrix}$ biçimindedir.

Benzer şekilde $\lambda = 3$ için $\begin{bmatrix} k \\ -k \\ -k \end{bmatrix}$ özvektörü $\lambda = -2$ için $\begin{bmatrix} k \\ -k \\ 4k \end{bmatrix}$ özvektörü bulunur.

9.4. Teorem: $T : V_n \to V_n$ lineer dönüşümünün farklı $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ özvektörleri lineer bağımsızdır.

İspat: n üzerinde tümevarımla yapalım:

$n = 1$ için $\overrightarrow{v_1} \neq 0$ olduğundan $\overrightarrow{v_1}$ lineer bağımsızdır.

$n = 2$ için $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ özvektörleri lineer bağımsız olduğunu gösterelim.
$$c_1\overrightarrow{v_1} + c_2\overrightarrow{v_2} = 0$$
olsun. $T(c_1\overrightarrow{v_1} + c_2\overrightarrow{v_2}) = T(0)$ veya $c_1T(\overrightarrow{v_1}) + c_2T(\overrightarrow{v_2}) = 0$ ise
$$T(\overrightarrow{v_1}) = \lambda_1\overrightarrow{v_1}, T(\overrightarrow{v_2}) = \lambda_2\overrightarrow{v_2}$$
olduğundan
$$c_1\lambda_1\overrightarrow{v_1} + c_2\lambda_2\overrightarrow{v_2} = 0$$
olur. Şimdi $c_1\overrightarrow{v_1} + c_2\overrightarrow{v_2} = 0$ denklemini λ_2 ile çarpıp bu denklemden çıkartalım, ikinci terimler aynı olacağından
$$c_1(\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{v_1} = 0$$
olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve $\overrightarrow{v_1} \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ olur. c_1 ın bu değeri $c_1\overrightarrow{v_1} + c_2\overrightarrow{v_2} = 0$ denkleminde yazılınca, $\overrightarrow{v_2} \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ elde edilir.

Şimdi $n-1$ vektör için doğruluğunu kabul edip n vektör için gösterelim. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ özvektörlerinden ilk $(n-1)$ tanesinin lineer bağımsız ve

$$c_1\overrightarrow{v_1} + c_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + c_{n-1}\overrightarrow{v_{n-1}} + c_n\overrightarrow{v_n} = 0 \qquad (1)$$

olsun.

$$c_1T(\overrightarrow{v_1}) + c_2T(\overrightarrow{v_2}) + \cdots + c_{n-1}T(\overrightarrow{v_{n-1}}) + c_nT(\overrightarrow{v_n}) = 0 \qquad (2)$$

ve $i = 1,2,\dots,n$ için $T(\overrightarrow{v_i}) = \lambda_i\overrightarrow{v_i}$ olduğundan

$$c_1\lambda_1\overrightarrow{v_1} + c_2\lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + c_{n-1}\lambda_{n-1}\overrightarrow{v_{n-1}} + c_n\lambda_n\overrightarrow{v_n} = 0$$

olur. Şimdi (1) denklemini λ_n ile çarpıp (2) denkleminden çıkartalım, son terimler aynı olacağından,

$$c_1(\lambda_1-\lambda_n)\overrightarrow{v_1} + c_2(\lambda_2-\lambda_n)\overrightarrow{v_2} + \cdots + c_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\overrightarrow{v_{n-1}} = 0$$

elde edilir. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfır, yani

$$c_1(\lambda_1-\lambda_n) = c_2(\lambda_2-\lambda_n) = \cdots = c_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n) = 0$$

olur. Diğer taraftan λ_i $(i = 1,2,\dots,n)$ ler farklı olduklarından

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$$

çıkar. c_i $(i = 1,2,\dots,n-1)$ ler (1) de yerine yazılınca

$$c_n\overrightarrow{v_n} = 0$$

elde edilir. $\overrightarrow{v_n} \neq 0$ olduğundan $c_n = 0$ bulunur ve tüme varım tamamlanır.

Sonuç olarak, farklı $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ özvektörleri lineer bağımsız olurlar.

BİR MATRİSİN KÖŞEGENLEŞTİRİLMESİ

9.4. Tanım: V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $T: V \to V$ bir lineer dönüşüm olsun. V'nin öyle bir tabanı olsun ki, T'nin bu tabana göre A matrisi köşegen matris olsun. Bu durumda T ye köşegenleştirilebilir denir.

T'nin köşegenleştirilebilmesi demek, özvektörlerden oluşan V'nin bir tabanını bulmak ve bu tabana göre dönüşüm matrisini oluşturmaktır. Bu köşegen matris,

$$B = P^{-1}AP$$

ile verilir. Buradaki P matrisi, standart tabandan özvektörlerin oluşturduğu tabana geçiş matrisidir. Bu durumda P matrisi kısaca, sütunları lineer bağımsız özvektörler olan matristir. P nin sütunları lineer bağımsız olduğu için P matrisi bir regüler matristir. Böylece V, n-boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere

$$T: V \to V$$

lineer dönüşümünün (A matrisinin) köşegenleştirilebilmesi için aşağıda işlemler uygulanır:

(i) T lineer dönüşümün matris gösterimi A'nın karakteristik polinomu yazılır.

$T(\lambda) = |A - \lambda I|$

(ii) $T(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$
karakteristik polinomun kökleri bulunur. Bu kökler A'nın özdeğerleridir. Bulunan özdeğerler gerçel değilse, A matrisi köşegenleştirilemez.

(iii) A'nın her bir λ özdeğerine karşı gelen özvektörleri bulunur.
$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

(iv) Bu özvektörler n-boyutlu bir vektör uzayı için taban oluşturuyorsa A matrisi köşegenleştirilebilir.

(v) Köşegen matris aşağıdaki şekillerden biri ile bulunur.

a) Lineer dönüşüm A matrisi ile verilmişse, standart tabana göre dönüşüm matrisi A olan lineer dönüşüm yazılır. Bu dönüşümün, özvektörlerin oluşturduğu tabana göre matrisi aranan köşegen matristir.

b) Sütunları özvektörler olan matris P olmak üzere
$$B = P^{-1}AP$$
matrisi köşegen matristir. B'nin köşegen elemanlarına özdeğerler karşılık gelir.

Örnek: Yukarıda $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ örneğini incelemiştik. Şimdi bu matrisinin bir köşegen matrise benzer olup olmadığını veya köşegenleştirilip köşegenleştirilemeyeceğini araştıralım.

Bu matrisin köşegenleştirilebilmesi için e_1, e_2, e_3 standart tabanına göre temsil ettiği T lineer dönüşümünün özvektörlerinden oluşan bir tabanının bulunmasıdır. Bu örnekte bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$ bulunmuştu. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler de $k \neq 0$ için
$x_1 = (k, 0, -k)$, $x_2 = (k, -k, -k)$, $x_3 = (k, -k, 4k)$
biçimindeydi.

Burada k = 1 için,
$\lambda = 2$ özdeğerine karşılık $x_1 = (1, 0, -1)$ özvektörü
$\lambda = 3$ özdeğerine karşılık $x_2 = (1, -1, -1)$ özvektörü
$\lambda = -2$ özdeğerine karşılık $x_3 = (1, -1, 4)$ özvektörü

bulunur. $E=\{x_1=(k,0,-k), x_2=(1,-1,-1), x_3=(1,-1,4)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ için bir taban teşkil eder. Şimdi, standart tabana göre matris gösterimi A olan T lineer dönüşümünün $E=\{(1,0,-1),(1,-1,-1),(1,-1,4)\}$ tabanına göre matrisini bulalım:

$$T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$T(x,y,z)=(x-y-z, x+3y+z, -3x+y-z)$$

olur (Bu dönüşümün nasıl elde edildiğini hatırlayınız).

$$T(1,0,-1)=(1-0+1, 1+3\cdot 0+(-1), -3\cdot 1+0-(-1))$$
$$=(2,0,-2)$$
$$(2,0,-2)=a(1,0,-1)+b(1,-1,-1)+c(1,-1,4)$$
$$(2,0,-2)=(a+b+c\,, -b-c, -a-b+4c)$$
$$a=2, b=0, c=0$$

Bu değerler aranan matrisin 1. sütunudur.

Benzer şekilde;

$$T(1,-1,-1)=(3,-3,-3)=a(1,0,-1)+b(1,-1,-1)+c(1,-1,4)$$
$$(3,-3,-3)=(a+b+c, -b-c, -a-b+4)$$
$$a=0, b=3, c=0$$

bulunur. Bu değerler matrisin 2. sütunudur. Benzer şekilde;

$$T(1,-1,4)=(1+1-4, 1-3+4, -3-1-4)=(-2,2,-8)$$
$$(-2,2,-8)=a(1,0,-1)+b(1,-1,-1)+c(1,-1,4)$$
$$a=0, b=0, c=-2$$

bulunur. Bu değerler de matrisin 3. sütunudur. Bulunan değerlerle matrisi oluşturursak,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

köşegen matrisi elde edilir. Sonuç olarak, verilen A matrisi köşegenleştirilebilir bir matristir.

Köşegenleştirilebilmenin diğer bir yolu da, özvektörleri sütun vektörü olarak alan matris P olmak üzere,

$$B=P^{-1}AP$$

matrislerinin çarpımıdır.

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

olur. P^{-1} ters matrisi ise

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Kontrol ediniz.

$$B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

köşegen matris elde edilir; yani $B = P^{-1}AP$ dir.

Sonuç olarak, T'nin dönüşüm matrisinin köşegenleştirilebilmesi için özdeğerlere karşılık bulunan özvektörlerin bir taban oluşturmasıdır. Buradan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

9.5. Teorem: Bir $A = (a_{ij})_{n\times n}$ kare matrisinin karakteristik polinomunun n tane kökü farklı ve gerçel ise A matrisi köşegenleştirilebilir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin köşegenleştirilemeyeceğini gösteriniz.

Çözüm: A matrisinin karakteristik polinomu,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

olup, $(1-\lambda)^2 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ özdeğeri bulunur. Bu özdeğere karşılık gelen özvektörü bulalım:

$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 0$$

$\lambda = 1$ özdeğerine karşı gelen özvektör $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ olmak üzere $(x_1, 0)$ şeklindedir. Buna göre, $\mathbb{R}^2$ nin özvektörlerden oluşan bir tabanı bulunamaz. O halde verilen A matrisi köşegenleştirilemez.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz mümkünse köşegenleştiriniz.

Çözüm:

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda) - 0] + 2(0 - 3(1-\lambda)) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

bulunur. Buradan;

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$$

özdeğerleri bulunur. Bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri bulalım:

$\lambda_1 = 1$ için

$$(A - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_2 + 3x_3 = 0 \text{ ve } 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sistemini x_1 e göre çözersek ; $x_2 = -6x_1$, $x_3 = 4x_1$ bulunur. Buna göre $x = (x_1, -6x_1, 4x_1)$; $x_1 = 1$ için $x = (1, -6, 4)$ olur.

$\lambda = -1$ için özdeğerine karşı gelen özvektör:

$$(A - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, 2x_2 = 0 \text{ ve } 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

sisteminin x_1'e göre çözümü $x_2 = 0, x_3 = -\frac{2}{3}x_1$ olur. $x_1 = 3$ için $x = (3, 0, -2)$ bulunur.

$\lambda = 4$ özdeğerine karşı gelen özvektör;

$$(A-\lambda I_3)=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 3\\ 0 & -3 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$-3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, -3x_2 = 0$ ve $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$
sisteminin x_3'e göre çözümü $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ olur.

$x_1 = 1$ için $x = (1, 0,1)$ bulunur. Böylece özvektörler

$(1, - 6, 4)$, $(3, 0, - 2)$, $(1, 0, 1)$

olarak bulunur. Bu vektörler lineer bağımsızdır ve $\mathbb{R}^3$ için bir taban teşkil ederler. Buna göre A matrisi köşegenleştirilebilir. A matrisinin standart tabana göre temsil ettiği lineer dönüşüm

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z , y, 2x + y + 2z)$

dir.

T'nin $\{(1, -6, 4), (3, 0, -2), (1, 0, 1)\}$ tabanına göre dönüşüm matrisini bulalım: Bunun için tabandaki her vektörün T altındaki görüntüsünün yine tabana göre koordinatlarını bulmalıyız.

$T(1, -6, 4) = (1 + 2.(-6) + 3 \cdot 4, -6, 2 \cdot 1 - 6 + 2 \cdot 4) = (1, -6, 4)$

$(1, -6, 4) = a(1, -6, 4) + b(3, 0, -2) + c\,(1, 0, 1)$

buradan açık olarak $a = 1, b = 0, c = 0$ bulunur. Bu değerler matrisin 1. sütunudur.

$T(3, 0, -2) = (3 + 2 \cdot 0 + 3(-2), 0 , 2 \cdot 3 + 0 + 2 \cdot (-2)) = (-3, 0, 2)$

$(-3, 0, 2) = a(1, -6, 4) + b(3, 0, -2) + c\,(1, 0, 1)$

burada $a = 0 , b = -1 , c = 0$ olduğu hemen görülür. Bu değerler matrisin 2. sütunudur.

$T(1, 0, 1) = (1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1, 0 , 2 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 1) = (4, 0, 4)$

$(4, 0, 4) = a(1, -6, 4) + b(3, 0, 2) + c(1, 0, 1)$

burada $a = 0, b = 0, c = 4$ olduğu açıktır. Bu değerlerde matrisin 3. sütunudur. Buna göre,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

bulunur. Bu köşegen matrisin köşegen üzerindeki öğelerinin özdeğerler olduğuna dikkat edelim.

Şimdi ikinci bir yol olarak,

T'nin özvektörlerinden oluşan $\{(1,-6,4),(-3,0,2),(1,0,1)\}$ tabanına göre köşegen matrisini daha kısa yoldan bulalım (Özvektörler sütunları oluşturuyor):

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$B = P^{-1}AP$$

köşegen matristir. P^{-1} ters matrisi bulunarak çarpma işlemi yapılırsa

$$B=\frac{1}{30}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & -3 & -6 \\ 12 & 14 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B=\frac{1}{30}\begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -6 \\ 0 & 0 & 120 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3.4. Örnek: $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z) = (x+2y+3z, -y+2z, 2z)$$

lineer dönüşümünün özdeğer ve özvektörlerini bulunuz. Mümkünse dönüşüm matrisini köşegenleştiriniz.

Çözüm: $T(x,y,z) = \lambda(x,y,z)$

$(x+2y+3z, -y+2z, 2z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$[(1-\lambda)x+2y+3z, (-1-\lambda)y+2z, (2-\lambda)z] = (0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)x+2y+3z &= 0 \\ (-1-\lambda)y+2z &= 0 \\ (2-\lambda)z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

T'nin karakteristik polinomu,

$$|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)=0$$

olup, $\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 2$ özdeğerleri bulunur.

Şimdi bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım:

$\lambda = 1$ için (1) den,

$$2y + 3y = 0, -2y + 2z = 0$$

buradan $z = 0, y = 0, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ olur. Buna göre $x = 1$ için $(1, 0, 0)$ özvektörü elde edilir.

$\lambda = -1$ için (1) den,

$$2y + 2y + 3z = 0, 2z = 0, 3z = 0$$

buradan, $z = 0, x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x = y = 1$ için $(1, 1, 0)$ özvektörü elde edilir.

$\lambda = 2$ için (1) den,

$$-x + 2y + 3y = 0, -3y + 2z = 0, 0 \cdot z = 0$$

sistemin z ye göre çözümü $x = \frac{13}{3} z, y = \frac{2}{3} z$ olur. $z = 3$ için çözümlerinden biri (13, 2, 3) özvektörüdür.

Buradan, (1, 0, 0) (1, 1, 0) (13, 2, 3) özvektörleri lineer bağımsız olduğu için $\mathbb{R}^3$ için bir taban teşkil eder. Bu nedenle dönüşüm matrisi köşegenleştiri-lebilir. Buna göre;

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğunu görünüz.

Örnek: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = (x, -2x + y)$$

lineer dönüşüm matrisini mümkünse köşegenleştiriniz.

Çözüm: $T(x, y) = \lambda(x, y)$

$(x, -2x + y) = (\lambda x, \lambda y)$

$[(1 - \lambda)x, -2x + (1 - \lambda)y] = (0, 0)$

$$\left.\begin{aligned} (1 - \lambda)x &= 0 \\ -2y + (1 - \lambda)y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Karakteristik polinom,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

dir. $\lambda = 1$ değerine karşılık gelen özvektör (1) den

$$0 \cdot x = 0, \quad -2x + 0 \cdot y = 0$$

sistemin çözümünden $x = 0$ bulunur. Özvektörler $(0, y), y \neq 0$ şeklindedir. Buradan, $\mathbb{R}^2$ nin bir tabanı oluşturulamaz. Dolayısıyla dönüşüm matrisi köşegenleştirilemez.

Simetrik matrislerin $(A = A^T)$ köşegenleştirilmede özelliği vardır. Bununla ilgili teoremi verelim.

9.6. Teorem: $A = (a_{ij})_{n \times n}$ bir simetrik matris ise köşegenleştirilebilir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

9.1. Sonuç:

i) Simetrik bir matrisin karakteristik polinomunun bütün kökleri reel sayıdır.

ii) Simetrik matrisin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri ortogonaldir (diktir).

iii) Bir P matrisi vardır ki $P^{-1}AP$ matrisi köşegen matristir. A matrisinin özdeğerleri köşegen matrisin esas köşegeninin öğeleridir.

3.7. Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisini köşegenleştiriniz.

Çözüm: A'nın karakteristik polinomu,

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-\lambda[(6-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ özdeğerleri bulunur.

Şimdi bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri belirleyelim;

$\lambda = 0$ için;

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$3x + 3z = 0,\ 6y = 0$ ve $3x + 3z = 0$

buradan $y = 0, x = -z$ bulunur. Buna göre $z = -1$ için $\lambda = 0$ özdeğerine karşılık gelen özvektör $(1, 0, -1)$ olur.

$\lambda_2 = 6$ için

$3x + 3z = 0,$ ve $3x + 3z = 0$

buradan $x = z$ bulunur. Buna göre, $z = 1$ ve $z = 3$ için sırasıyla $(1, 0, 1)$ ve $(3, 1, 3)$ vektörleri $\lambda = 6$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler olarak alınabilir.

$\lambda = 6$ özdeğeri karakteristik polinomun iki katlı köküdür. Bu nedenle iki tane lineer bağımsız özvektör elde edilir. Genel olarak λ, k katlı kök ise k tane lineer bağımsız özvektör bulunur. Şimdi köşegen matrisini bulalım.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

olur. //

Özdeğer ve özvektörlerin bazı özelliklerini verilim:

i) A bir üst üçgen (alt üçgen) matris ise A nın özdeğerleri esas köşegen üzerindeki elemanlardır.

ii) A ve A^T matrisleri aynı özdeğerlere sahiptir.

iii) Bir A kare matris için $A^q = 0$ olacak şekilde bir q tamsayısı bulunabiliyorsa A ya nilpotent matris denir. A nilpotent matris ise bu durumda bir tek özdeğeri vardır bu da 0'dır.

iv) A nın determinantının değeri, karakteristik polinonunun bütün köklerinin çarpımına eşittir.

v) A matrisinin regüler olmaması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda = 0$ ın A'nın bir özdeğeri olmasıdır.

vii) A bir köşegenleştirilebilen matris ise A^T ve A^n matrisleri de köşegenleştirilebilir $(n \in \mathbb{N})$.

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1975.
2. Hüseyin Bilgiç, Lineer Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş, 2015.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik III Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Üniversiteye Hazırlık Matematik Seti, Tümay Yayınları, İstanbul Yayıncılık, 2006, Ankara.
5. Seymeur LİPSCHUTZ Ph. Dr., Çev. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Serisinden Lineer Cebir, Japonya.
6. Yrd. Doç. Dr. Nezahat ÇETİN, Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 1074, AÖF Yayınları: 589, 1998, Eskişehir.
7. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
8. Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.
9. Thomas Calculus 2, George B. Thomas Jr., Massachusetts Institute of Technology, Maurice D. Weir, Naval Postgraduate School, Joel Hass, University of California Davis, Frank R. Giordano, Naval Postgraduate School, Çeviren: Recep Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
10. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
11. Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI, Doç. Dr. İsmail GÖK, Ankara Üniversitesi, Ders Notları, 2021Ankara.