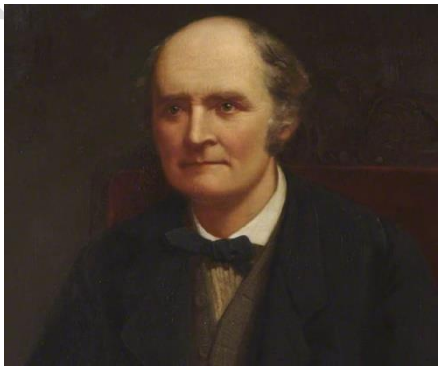
1. BÖLÜM
MATRİSLER

MATRİS KAVRAMI

Matris kavramını ilk defa İrlandalı Matematikçi William Rowan Hamilton (1805-1865) ile İngiliz Matematikçisi Arthur Cayley (1821-1895) tarafından kullanılmıştır.

William Rowan Hamilton
(04 Ağustos 1805, Dublin, İrlanda - 02 Eylül 1865, Dublin, İrlanda)



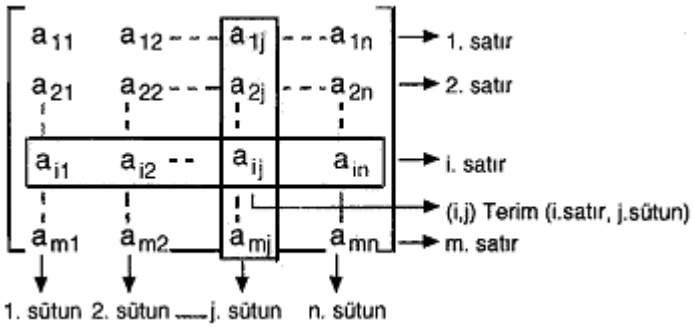
Arthur Cayley
(16 Ağustos 1821, Richmond, İngiltere - 26 Ocak 1895, Cambridge, İngiltere)

Öğr. Gör. ILMAZ

1.1. Tanım: $i, j \in \mathbb{N}^+$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere, aşağıdaki tablo biçimde yazıma $m \times n$ boyutunda matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Matris gösterimi kısaca $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ biçiminde gösterilir. Tabloda yatay sıralara matrisin satırları, düşey sıralara matrisin sütunları (kolonları) denir. Buna göre verilen tablo m satır sayını n sütunludur. Ayrıca a_{ij}, A matrisinin i. satırı, j. sütunudur.



1.1. Not: Bu çalışmada $\mathbb{R}$ reel sayılar üzerinde çalışılacaktır. $\mathbb{C}$ karmaşık (kompleks) sayılar incelenmediğinden karmaşık sayılardan bahsedilmeyecektir. Karmaşık sayılar incelenince reel sayılar üzerindeki lineer cebir karmaşık sayılar için de geçerlidir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 & \pi & e \\ -2 & 0 & 1{,}2 & 6/5 \end{bmatrix}_{3\times 4}$, 3×4 boyutunda bir matristir. Bu matriste

1. satır 1. sütun $a_{11} = 3$ — 1. satır 2. sütun $a_{12} = 2$
1. satır 3. sütun $a_{13} = -1$ — 1. satır 4. sütun $a_{14} = 0$
2. satır 1. sütun $a_{21} = \sqrt{2}$ — 2. satır 2. sütun $a_{22} = 4$
2. satır 3. sütun $a_{33} = \pi$ — 2. satır 4. sütun $a_{24} = e$
3. satır 1. sütun $a_{31} = -2$ — 3. satır 2. sütun $a_{32} = 0$
3. satır 3. sütun $a_{33} = 1{,}2$ — 3. satır 4. sütun $a_{34} = 0$

biçimindedir.

MATRİS ÇEŞİTLERİ

1.2. Tanım: Satır ve sütun sayıları eşit olan matrislere kare matris denir. $A = [a_{ii}]_{n\times n}$ şeklindedir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ matrisi 3×3 boyutunda bir kare matristir.

Örnek: $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 4}$

B matrisi 4×4boyutunda bir kare matristir.

1.3. Tanım: Bütün elemanları 0 olan matrise sıfır matrisi denir. Sıfır matris matrislerde toplama işleminin birim (etkisiz) elemanıdır. $O = [O_{ij}]_{m\times n}$ şeklindedir.

Örnek: $0_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

Bu matris 3×4 boyutunda bir sıfır matristir.

1.4. Tanım: Her $n \in \mathbb{N}$, her $i, j \in \mathbb{N}^+$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ kare matriste, $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ terimlerinin bulunduğu doğruya esas (asal) köşegen denir, $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \cdots, a_{1n}$ terimlerinin bulunduğu doğruya yedek köşegen denir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

matrisinde 4; –2; 6 ve 7 sayılarının bulunduğu doğruya esas köşegenin, 3; 5; 0; 2 sayılarının bulunduğu doğruya yedek köşegenin terimleridir.

1.5. Tanım:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

ifadesine Kronecker deltası adı verilir.

1.6. Tanım: Bir kare matriste esas (asal) köşegen üzerindeki elemanlar 1, diğer elemanları 0 olan matrise birim matris denir. I ile gösterilir. Birim matris $I = [\delta_{ij}]$ Kronecker biçiminde tanımlanan matrislerdir.

Örnek: $I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$ ve $I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$

3×3 ve 2×2 boyutunda birer birim matrislerdir.

1.7. Tanım: $X = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n]$ şeklinde sadece bir satırdan oluşan matrise satır matris denir. $Y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ şeklinde sadece bir sütundan oluşan matrise sütun matris denir. Satır ve sütun matrislerine satır ve sütun vektörleri adı da verilir.

1.8. Tanım: Bir kare matriste, esas köşegen dışında kalan tüm eleman sıfır ise bu matrise köşegen matris denir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

A ve B matrisleri birer köşegen matrislerdir.

1.9. Tanım: Bir matrisinin bazı satır ve sütunları kaldırıldığında geri kalan terimlerinin oluşturduğu yeni matrise alt matris denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 5 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ için $B=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ alt matristir. Çünkü B matrisi A matrisinin 3. satırı ve 3. sütunu atılarak elde edilmiştir.

İKİ MATRİSİN EŞİTLİĞİ

1.10. Tanım: Boyutları aynı olan iki matrisin aynı numaralı elemanları birbirine eşit ise buna eşit matris denir. (Boyutları farklı olan matrislerin eşitliğinden bahsedilemez.)

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ matrisleri verilsin, eğer her $a_{ij}=b_{ij}$ ise $A=B$ dir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ olduğundan $A=B$ dir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -x+2y & 5 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 3 & 2x-4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ve A = B ise x ve y'nin değerini bulunuz.

Çözüm: Eşitlik tanımı gereğince

$2x-4=8$ ise $x=6$

$-x+2y=4$ ise $x=5$

dür. Buna göre $x=6$ ve $y=5$ dir.

BİR MATRİSİN İZİ

1.11. Tanım: Bir kare matrisin esas köşegen üzerindeki terimleri toplamına o matrisin izi denir. $A=[a_{ii}]_{n\times n}$ kare matrisinin izi,

$$iz(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

dir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ matrisinin izi, $iz(A)=4+8+10=22$ dir.

1.1. Teorem: A ve B iki kare matris, $\alpha\in\mathbb{R}$ için,

i) $iz(A+B)=iz(A)+iz(B)$

ii) $iz(\alpha A)=\alpha\cdot iz(A)$

dir.

İspat: i) Reel sayılarda toplama özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} iz(A)+iz(B) &= a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}+b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn} \\ &= (a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})+\cdots+(a_{nn}+b_{nn}) \\ &= iz(A+B) \end{aligned}$$

bulunur.

ii) Reel sayılarda çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \alpha\cdot iz(A) &= \alpha(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) \\ &= \alpha\cdot a_{11}+\alpha\cdot a_{22}+\cdots+\alpha\cdot a_{nn} \\ &= iz(\alpha A) \end{aligned}$$

bulunur.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

MATRİSLERDE TOPLAMA ve ÇIKARMA

1.12. Tanım: Aynı boyuttaki matrislerin aynı numaralı elemanları toplanarak veya çıkarılarak matrislerin toplaması veya çıkarılması elde edilir. (Farklı boyutlardaki matrislerin toplama ve çıkarmasından söz edilemez.)

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ise
$A \pm B = [a_{ij}]_{m\times n} \pm [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$

şeklindedir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise $A + B$ ve $A - B$ yi bulunuz.

Çözüm: $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

$A - B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 & 2 \\ -2 & 7 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 3 & y \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A + B = C$ ise $x \cdot y$ nedir?

Çözüm: $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & x \end{bmatrix}$ olduğundan $x = 8$ ve $y = 3$ dir. Buna göre $x \cdot y = 24$ olarak bulunur.

Örnek: $\begin{bmatrix} 2x & 3 \\ -x & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3y & 2 \\ 4y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ matrislerinde x ve y'nin değeri nedir?

Çözüm: Matrislerde toplama işlemi gereğince $\begin{bmatrix} 2x-3y & 5 \\ -x+4y & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ bulunur. Matrislerde eşitlik işlemi gereğince

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$2x - 3y = 8 \text{ ve } -x + 4y = 6$$

iki bilinmeyenli iki denklemi elde edilir. Burada bu denklemler çözülürse $x = 10, y = 4$ elde edilir.

1.13. Tanım: Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin negatifi (toplamaya göre tersi) $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ biçimindedir ve $-A$ ile gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & 10 & 11 \\ 6 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ ise $-A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 1 & -10 & -11 \\ -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

1.2. Teorem: A, B, C aynı boyutta matrisler olmak üzere, matrislerin toplama işleminde aşağıdaki özellikler vardır:

i) $A + B = B + A$ (Değişme özelliği)
ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Birleşme özelliği)
iii) $A + 0 = 0 + A = A$ (Birim eleman özelliği)
vi) $A + (-A) = (-A) + A = 0$ (Ters eleman özelliği)

İspat: i) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} \\ &= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} \\ &= [b_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n} \\ &= B + A \end{aligned}$$

dir.

ii) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ve $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= [a_{ij}]_{m\times n} + \left([b_{ij}]_{m\times n} + [c_{ij}]_{m\times n}\right) \\ &= [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij} + c_{ij}]_{m\times n} \\ &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m\times n} \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m\times n} \\ &= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} + [c_{ij}]_{m\times n} \\ &= \left([a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}\right) + [c_{ij}]_{m\times n} \end{aligned}$$

dir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

iii) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $O = [0_{ij}]_{m\times n}$ olmak üzere;

$$A + O = [a_{ij}]_{m\times n} + [0_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + 0_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = A$$
$$O + A = [0_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n} = [0_{ij} + a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = A$$

dir.

vi) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ olmak üzere,
$$A + (-A) = [a_{ij}]_{m\times n} + [-a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} - a_{ij}]_{m\times n} = [0_{ij}]_{m\times n} = 0$$
$$(-A) + A = [-a_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n} = [-a_{ij} + a_{ij}]_{m\times n} = [0_{ij}]_{m\times n} = 0$$

1.1. Sonuç: Matrisler toplama işlemine göre değişmeli gruptur.

MATRSİLERİN SKALERLE ÇARPIMI

1.14. Tanım: Bir matrisinin her elemanı α ile çarpılmasına o matrisin α skaleriyle çarpılması denir. Bu durum $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha A = \alpha \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}$$

biçimindedir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise 3A ve $-4A$ yı bulunuz.

Çözüm: $3A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $-4A = \begin{bmatrix} -16 & -12 & -8 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 22 & 12 \end{bmatrix}$ ise $\frac{1}{2}A$ nedir?

Çözüm: $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 22 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ise $4A-2B$ yi bulunuz.

Çözüm: $4A-2B=\begin{bmatrix} 20 & 12 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -14 & 8 \end{bmatrix}$

1.3. Teorem: A matrisi $m \times n$ boyutunda $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ olmak üzere, matrislerin skalerle çarpımında aşağıdaki özellikler vardır:

i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
ii) $(\alpha_1 + \alpha_2)A = \alpha_1 A + \alpha_2 A$
iii) $(\alpha_1 \cdot \alpha_2)A = \alpha_1(\alpha_2 A) = \alpha_2(\alpha_1 A)$
iv) $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$
v) $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0_{m\times n}$

İspat: i) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\alpha(A + B) &= \alpha\left([a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}\right) \\ &= \alpha[a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} \\ &= \alpha[A_{ij}]_{m\times n} + \alpha[B_{ij}]_{m\times n} \\ &= \alpha A + \alpha B\end{aligned}$$

dir.

ii) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \alpha_2)A &= (\alpha_1 + \alpha_2)[a_{ij}]_{m\times n} \\ &= \alpha_1[a_{ij}]_{m\times n} + \alpha_2[a_{ij}]_{m\times n} \\ &= \alpha_1 A + \alpha_2 A\end{aligned}$$

dir.

iii, iv ve v benzer şekilde ispatlanır.

MATRİSLERDE ÇARPMA

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

1.15. Tanım: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ şeklinde iki matrisi verilsin.

$$c_{ik} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + \dots + a_{in}.b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}$$

toplamıyla bulunan $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ matrisine A ile B matrislerinin çarpımı denir ve

$$A \cdot B = [a_{ij}]_{m\times n}[b_{jk}]_{n\times p} = [c_{ik}]_{m\times p} = C$$

biçimindedir. Bu durum,

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2p} \\ \dots & & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & & c_{ik} & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Bu yazılış

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jp} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jp} \end{bmatrix}$$

biçimdedir.

A ve B matrisleri için $A \cdot B$ çarpımının tanımlı olması için A matrisinin sütün sayısının B matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir. A matrisinin sütun sayısı B matrisinin satır sayısına eşit değilse $A \cdot B$ çarpımı tanımlı değildir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{3x2}$ ise $A \cdot B$ yi bulunuz.

Öğr. Gör. Şaban AZ

Çözüm: $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2.4+3.(-2)+5.2 & 2.1+3.6+5.3 \\ (-1).4+1.(-2)+4.2 & (-1).1+1.6+4.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 35 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ise $A \cdot B$ yi bulunuz.

Çözüm: $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1.1+3.(-2)+2.3 \\ 5.1+(-1)(-2)+4.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 19 \end{bmatrix}$

Örnek: $A = [a_{ij}]_{3\times n}$ ve $B = [b_{jk}]_{5\times p}$ ise $A \cdot B$ nin tanımlı olması için $n + p$ nin en küçük değeri kaçtır?

Çözüm: $A \cdot B = [a_{ij}]_{3\times n}[b_{jk}]_{5\times p}$ tanımlı olması için A matrisinin sütun sayısı, B matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir. Buna göre $n = 5$ dir. $n + p$ toplamının en küçük olması için B matrisinin sütun sayısı $p = 1$ olması gerekir. O halde

$$n + p = 5 + 1 = 6$$

dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, her $x \in \mathbb{Z}^+$ için $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ nx & 1 \end{bmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Tümevarım yöntemi ile göstereceğiz.

i) $n = 1$ için $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ olduğundan ifade doğrudur.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

ii) $n = k$ için $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kx & 1 \end{bmatrix}$ ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.

$n = k + 1$ için $A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)x & 1 \end{bmatrix}$ ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kx & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)x & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan her $x \in \mathbb{Z}^+$ için $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ nx & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ olduğuna göre, her $x \in \mathbb{Z}^+$ için

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Tümevarım yöntemi ile göstereceğiz.

i) $n = 1$ için $A^1 = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ olduğundan ifade doğrudur.

ii) $n = k$ için $A^k = \begin{bmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{bmatrix}$ ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.

$n = k + 1$ için $A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)x & -\sin(k+1)x \\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{bmatrix}$ ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x.\cos kx - \sin x.\sin kx & -\cos x.\sin kx - \sin kx.\cos kx \\ \sin x.\cos kx + \cos x.\sin kx & -\sin x.\sin kx + \cos x.\cos kx \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)x & -\sin(k+1)x \\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{bmatrix}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

olduğundan her $x \in \mathbb{Z}^+$ için $A^n = \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$ dir.

1.4. Teorem: A, B, C matrisleri $m \times n$ boyutunda $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, matrislerin çarpmasında aşağıdaki özellikler vardır:

i) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (Değişme özelliği yoktur)
ii) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (Birleşme özelliği)
iii) $A \cdot I = I \cdot A = A$ (Birim eleman özelliği)
vi) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
(Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği)
vii) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$

Ayrıca, 8. Özellik olan çarpmanın ters eleman özelliği matrislerin tersinin tanımından sonra verilecektir.

İspat: i) $A \cdot B \neq B \cdot A$ değişme özelliğinin olmadığına bir örnek vermek yeterlidir.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 22 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

ii) $A = [a_{ij}], B = [b_{jk}]$ ve $C = [c_{kr}]$ olsun. Bu takdirde

$$A \cdot B = T = [t_{ik}] \quad \text{ve } B \cdot C = S = [a_{jr}]$$

şeklinde olsunlar. Öyleyse,

$$t_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{im} \cdot b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

$$s_{jr} = b_{j1} \cdot c_{1r} + b_{j2} \cdot c_{2r} + \ldots + b_{jn} \cdot c_{nr} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \cdot c_{kr}$$

dir. Şimdi $(A \cdot B)$ ve C çarpılırsa $A \cdot B = T$ olduğundan

$$t_{i1} \cdot c_{1r} + t_{i2} \cdot c_{2r} + \ldots + t_{in} \cdot b_{nr} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \cdot c_{kr} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (a_{ii} \cdot b_{jk}) \cdot c_{kr} \qquad (1)$$

dir. Diğer taraftan A, (BC) ile çarpılırsa $BC = S$ olduğundan

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$a_{i1}\cdot s_{1r}+a_{i2}\cdot s_{2r}+...+a_{im}\cdot s_{mr}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\cdot s_{jr}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ii}\cdot(b_{jk}\cdot c_{kr}) \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) denklemler birbirlerine eşit olduğundan $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ dir.

iii) $A=[a_{ii}]_{n\times n}$ ve $I_{n\times n}$ olsun. Bu takdirde $A\cdot I=T=[t_{ik}]$ şeklinde olsun. Öyleyse;

$$t_{ik}=a_{i1}\cdot 0+a_{i2}\cdot 0+\cdots+a_{ik}\cdot 1+\cdots+a_{in}\cdot 0=a_{ik}$$

dir. Elde edilen verileri matris formunda yazılırsa A matrisin kendisi olduğu gözükür. Buna göre,

$$A\cdot I=I\cdot A=A$$

dir.

vi, v, vi ve vii benzer şekilde ispatlanır.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 8\\ -2 & 0 & 5\end{bmatrix}$ ve I_3 ise $A\cdot I=A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A\cdot I=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 8\\ -2 & 0 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 8\\ -2 & 0 & 5\end{bmatrix}=A$

Örnek: $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}x & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ve $A\cdot B=B\cdot A$ ise x nedir?

Çözüm:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+0.4 & 2.0+0.2\\ -3x+4.4 & -3.0+4.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ -3x+16 & 8\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}x & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x.2+0.(-3) & x.0+0.4\\ 4.2+2.(-3) & 4.0+2.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ 2 & 8\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=B\cdot A$$

$$\begin{bmatrix}2x & 0\\ -3x+16 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ 2 & 8\end{bmatrix}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$-3x + 16 = 2$
$x = \frac{14}{3}$ //

Bu örnekten şu sonucu çıkarabiliriz. 1.4. Teorem ii özelliği gereği değişme özelliği yoktur. Ama değişme özelliği olan istisnai örnekler vardır.

1.2. Not: $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olan iki matris olsun. $A \cdot B = 0$ olacak şekilde matrisler vardır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \neq 0$ iki matrisi verilsin.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -2+2 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A \cdot B$ matrisini bulunuz.

Çözüm: $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 + 4.(-1) & 1.0 + 4.0 \\ 0.4 + 0.(-1) & 0.0 + 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.3. Not: $A \neq 0$ ve $A \cdot B = A \cdot C$ iken $B \neq C$ olabilir. (Determinant konusunda böyle tanımlanan A matrisinin determinantı sıfır olduğu izah edilecektir. Yani $A \neq 0$ ama A matrisinin determinantı sıfırdır.)

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \neq 0$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. $B \neq C$ olduğu halde

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 22 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 22 & 22 \end{bmatrix}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

olduğu halde $A \cdot B = A \cdot C$ dir.

1.5. Teorem: I, $n \times n$ boyutunda bir birim matris her $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$I^n = I$$

dir.

İspat: Önce $I^2 = I \cdot I$ yi bulalım. $I \cdot I = T = [t_{ik}]$ şeklinde olsun. Öyleyse,

$$t_{ii} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \cdots + 1 \cdot 1 + \cdots + 0 \cdot 0 = 1$$

dir. Elde edilen verileri matris formunda yazılırsa I matrisin kendisi olduğu gözükür. Buna göre

$$I^2 = I$$

dir. Benzer şekilde $I^3 = I$, ... , $I^n = I$ bulunur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ise A^{100} ü bulunuz.

Çözüm: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

bulunur. Buna göre,

$A^2 = I$ olacağından $A^{100} = (A^2)^{50} = I^{50} = I$

elde edilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ise A^{200} ü bulunuz.

Çözüm: $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 7 \cdot I$

$$A^{200} = (A^2)^{100} = (7 \cdot I)^{100} = 7^{100} I^{100} = 7^{100} \cdot I$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ise A^3 i bulunuz.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = 8 \cdot I_2$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ise A^{24} matrisini bulunuz.

Çözüm: $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2 \cdot 2^1 & 2^2 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2 \cdot 2 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 3 \cdot 2^2 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 4 \cdot 2^3 & 2^4 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^{24} = A \cdot A^{23} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^{23} & 0 \\ 23 \cdot 2 & 2^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{24} & 0 \\ 24 \cdot 2^{23} & 2^{24} \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Çözüm: Bu örneği tümevarımla gösterelim.

i) $n = 1$ için $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olup doğrudur.

ii) $n = k$ için $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 3.k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ doğru olduğunu kabul edelim. $n = k + 1$ için $A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 3.(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ doğruluğunu gösterelim.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$A^{k+1} = A.A^k = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3.k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3.(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ise A^{100} matrisini bulunuz.

Çözüm: $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2.2 & 2^2 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2 \cdot 2 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 4 \cdot 2 & 2^4 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^{100} = A \cdot A^{99} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{99} & 0 \\ 99 \cdot 2 & 2^{99} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 100 \cdot 2 & 2^{100} \end{bmatrix}$$

olur.

1.6. Teorem: $A_{n \times n} \neq 0$ ise $A^0 = I_{n \times n}$ dir.

İspat: $m \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

$$A^0 = A^{m-m} = A^m A^{-m} = \frac{A^m}{A^m} = 1$$
$$A^0 I_{n \times n} = 1 \cdot I_{n \times n}$$
$$A^0 = I_{n \times n}$$

olur.

1.16. Tanım: A ve B kare matrisi verilmiş olsun. Eğer $A \cdot B = B \cdot A$ oluyorsa A ve B değişmeli matrisler, eğer $A \cdot B = -B \cdot A$ oluyorsa A ve B ters değişmeli matrisler adı verilir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ için $A\cdot B=B\cdot A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ olduğundan A ve B değişmeli matrislerdir.

Örnek: $C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ ve $D=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ için $C\cdot D=-D\cdot C=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ olduğundan C ve D ters değişmeli matrislerdir.

1.18. Tanım: $A_{n\times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. Eğer $A\cdot B=I_{n\times n}$ ve

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

polinomu tanımlı iken,

$$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+a_{n-2}A^{n-2}+\cdots+a_1A+a_0I$$

biçiminde matrisleştirmeye polinom matrisi adı verilir.

Örnek: $f(x)=x^2+4x+3$ ve $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ise f(A) i bulunuz.

Çözüm: $f(A)=A^2+4A+3I$ olacağından

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix},\ 4A=\begin{bmatrix}8 & -4\\ 4 & 0\end{bmatrix},\ 3I=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}14 & -6\\ 6 & 2\end{bmatrix}$$

bulunur.

1.7. Teorem: f(x) ve g(x) iki polinom ve $A_{n\times n}$ bir kare matris olsun. bu takdirde;

i) $(f+g)(A)=f(A)+g(A)$
ii) $(f\cdot g)(A)=f(A)\cdot g(A)$
ii) $f(A)\cdot g(A)=g(A)\cdot f(A)$

dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

BİR MATRİSİN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

1.17. Tanım: $A_{n\times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. Eğer $A \cdot B = I_{n\times n}$ve $B \cdot A = I_{n\times n}$ olacak şekilde B matrisi varsa, B matrisine A matrisinin tersi denir. $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Burada,

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{n\times n}$$

olacaktır. Buna çarpmanın ters eleman özelliği de denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersini bulunuz.

Çözüm: A matrisinin çarpmaya göre tersi $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi olsun.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{n\times n}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4a+7c & 4b+7d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrislerin eşitliğinden,

$$4a + 7c = 1 \quad 4b + 7d = 0$$
$$a + 2c = 0 \quad b + 2d = 1$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemleri çözersek,

$$a = 2, b = -7, c = -1, d = 4$$

bulunur. Buna göre $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersini $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ elde edilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersini bulunuz.

Çözüm: A matrisinin çarpmaya göre tersi $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ matrisi olsun.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{n\times n}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1+2b_1+3c_1 & a_2+2b_2+3c_2 & a_3+2b_3+3c_3 \\ b_1+4c_1 & b_2+4c_2 & b_3+4c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrislerin eşitliğinden,

$$\begin{array}{lll} a_1 + 2b_1 + 3c_1 = 1 & a_2 + 2b_2 + 3c_2 = 0 & a_3 + 2b_3 + 3c_3 = 0 \\ b_1 + 4c_1 = 0 & b_2 + 4c_2 = 1 & b_3 + 4c_3 = 0 \\ c_1 = 0 & c_2 = 0 & c_3 = 1 \end{array}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemleri çözersek,

$$\begin{array}{lll} b_1 = 0 & b_2 = 1 & b_3 = -4 \\ a_1 = 1 & a_2 = -2 & a_3 = 5 \end{array}$$

bulunur. Buna göre $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersini

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ elde edilir. //

Matrisin tersinin bulunması ile ilgili iki yöntemden ileri de bahsedilecektir. Bunlardan biri determinant yöntemi determinant konusunda, diğeri Echeleon (Eşelon) yöntemi lineer denklem sistemleri konusundadır.

1.19. Tanım: $A_{n\times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. Eğer $A \cdot B = I_{n\times n}$ ve $B \cdot A = I_{n\times n}$ olacak şekilde B matrisi yoksa A matrisine **singüler (tekil) matris** denir. Yani singüler (tekil) matris tersi olmayan matrislere denir. Tersi olan matrislere ise **regüler (düzenli)** matris adı verilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ matrisini tersi var mıdır?

Çözüm: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. Buna göre $A \cdot A^{-1} = I$ olacağından,

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Matrislerin eşitliğinden,

$$a + 2c = 1 \quad b + 2d = 0$$
$$3a + 6c = 0 \quad 3b + 6d = 1$$

denklemlerinin çözümü yoktur. Buna göre A matrisinin tersi yoktur, öyleyse singüler matristir.

1.8. Teorem: Eğer bir matrisin tersi varsa tektir.

İspat: B ve C, A matrisinin iki tane ters matrisleri olsunlar. O zaman,

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \text{ ve } A \cdot C = C \cdot A = I_n$$

dir. Şimdi

$$B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I_n \cdot C = C$$

olup A matrisinin tersi varsa tektir.

1.9. Teorem: A ve B, $n \times n$ boyutunda terslenebilen kare matrisler olmak üzere, matrislerin çarpmaya göre tersinin aşağıdaki özellikler vardır:

i) $A \cdot I = I \cdot A = A$
ii) $(A^{-1})^{-1} = A$
iii) $(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1} \quad , \quad (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$
iv) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
v) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k, \quad (k \in \mathbb{N})$

İspat: i) $A_{n\times n}$ ve $I_{n\times n}$ biçiminde iki matrisi verilsin.

$$A_{n\times n} \cdot I_{n\times n} = C_{n\times n}$$

olsun,

$$c_{ii} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{i1} \cdot 0 + \dots + a_{ii} \cdot 1 + \dots + a_{in} \cdot b_{nn} = a_{ii}$$

biçimindedir. Buna göre $A \cdot I = I \cdot A = A$ dir.

ii) $A_{n\times n}$ matrisi ve $I_{n\times n}$ birim matrisi verilsin.

$$(A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} = I$$
$$[(A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1}] \cdot A = I \cdot A$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$(A^{-1})^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) = A$$
$$(A^{-1})^{-1} \cdot I = A$$
$$(A^{-1})^{-1} = A$$

iii) $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $A_{n\times n}$ olsunlar.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{n\times n}$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$(\alpha \cdot A)\left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right)(\alpha \cdot A) = I_{n\times n}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$(\alpha \cdot A)\left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot A \cdot A^{-1} = I_{n\times n}$$
$$\left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right)(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1} \cdot A = I_{n\times n}$$

dir.

iv) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ olduğunu göstermek için,

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_{n\times n}$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= [(A \cdot B) \cdot B^{-1}] \cdot A^{-1} \\ &= [A \cdot (B \cdot B^{-1})] \cdot A^{-1} \\ &= [A \cdot I] \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} \\ &= I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot [A^{-1} \cdot (A \cdot B)] \\ &= B^{-1} \cdot [I \cdot B] \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &= I\end{aligned}$$

v) $A \cdot A^{-1} = I_{n\times n}$

$$(A \cdot A^{-1})^k = I^k$$
$$A^k \cdot (A^{-1})^k = I$$
$$(A^k)^{-1} \cdot [A^k \cdot (A^{-1})^k] = (A^k)^{-1} \cdot I$$
$$[(A^k)^{-1} \cdot A^k] \cdot (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$$
$$I \cdot (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$$
$$(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$$

dir.

1.10. Teorem: $A_{n\times n}$ ve $B_{n\times n}$ iki matris, $A \neq 0$ ve tersi olan matris olsun. Bu takdirde $A \cdot B = 0$ ise $B = 0$ dır.

Öğr. Gör. Sabri YILMAZ

İspat: $A \cdot B = 0$

$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot 0$

$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = 0$

$I \cdot B = 0$

$B = 0$

1.11. Teorem: $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$ ve $C_{n\times n}$ tersleri olan matrisleri için,

$A \cdot B = A \cdot C$ ise $B = C$

dır.

İspat: A, B ve C tersi bulunan birer matrisler olsun. Bu takdirde,

$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot (A \cdot C)$

$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C$

$I \cdot B = I \cdot C$

$B = C$

olur.

BİR MATRİSİN TRANSPOZU (DEVRİĞİ)

1.20. Tanım: Bir $m \times n$ boyutunda A matrisin aynı numaralı satırlarını sütun, sütunlarını da satır yapmakla elde edilen $n \times m$ boyutundaki yeni matrise A matrisinin transpozu (devriği) denir. A^T ile gösterilir.

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ise $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$

Örnek: $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ise $B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ise $3A^T + 2B^T$ nu bulunuz.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ise $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dir. Buna göre

$$3A^T + 2B^T = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ ise $A\cdot A^T$ nu bulunuz.

Çözüm: $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ ve $A^T=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

$$A.A^T=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 16\\ 32 & 33\end{bmatrix}$$

1.12. Teorem: $\alpha\in\mathbb{R}$, A, B, C birer matris olsunlar.

i) $(A^T)^T=A$

ii) $(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$

iii) A ve B, $m\times n$ boyutunda iki matris ise $(A+B)^T=A^T+B^T$

iv) A, $m\times n$ boyutunda B, $n\times p$ boyutunda ise $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

v) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

İspat: i) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ olmak üzere,

$$(A^T)^T=\left([a_{ij}]_{m\times n}^T\right)^T=[a_{ji}]_{n\times m}^T=[a_{ij}]_{m\times n}=A$$

dir.

ii) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot A^T)&=\left(\alpha\cdot[a_{ij}]_{m\times n}\right)^T\\ &=\left([\alpha\cdot a_{ij}]_{m\times n}\right)^T\\ &=[\alpha\cdot a_{ji}]_{n\times m}\\ &=\alpha\cdot[a_{ji}]_{n\times m}\\ &=\alpha\cdot\left([a_{ij}]_{m\times n}\right)^T\\ &=\alpha\cdot A^T\end{aligned}$$

dir.

iii) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ iki matris,

$$\begin{aligned}(A+B)^T&=\left([a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}\right)^T\\ &=\left([a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}\right)^T\\ &=\left([c_{ij}]_{m\times n}\right)^T\end{aligned}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$
\begin{aligned}
&= [c_{ij}]^T_{m\times n} \\
&= [c_{ji}]_{n\times m} \\
&= [a_{ji} + b_{ji}]_{n\times m} \\
&= [a_{ji}]_{n\times m} + [b_{ji}]_{n\times m} \\
&= [a_{ij}]^T_{m\times n} + [b_{ij}]^T_{m\times n} \\
&= A^T + B^T
\end{aligned}
$$

dir.

iv) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ olsun. Matrislerde çarpma tanımından

$$A\cdot B = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk} = c_{ik}$$

bulunur. Burada transpoz işlemi uygulanırsa

$$(A\cdot B)^T = [c_{ij}]^T_{m\times n} = [c_{ji}]_{n\times m}$$

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\cdot b_{ji}$$

elde edilir. Buna göre,

$$(A\cdot B)^T = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}\right]^T = \left[\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\cdot a_{ji}\right] = B^T\cdot A^T$$

dir.

v) A tersi olan bir matris ise,

$$
\begin{aligned}
&A\cdot A^{-1} = I \\
&(A\cdot A^{-1})^T = I^T, && (I^T = I) \\
&(A^{-1})^T\cdot A^T = I, && \text{(iv den)} \\
&[(A^{-1})^T\cdot A^T]\cdot (A^T)^{-1} = I\cdot (A^T)^{-1} \\
&(A^{-1})^T\cdot [A^T\cdot (A^T)^{-1}] = (A^T)^{-1} \\
&(A^{-1})^T\cdot I = (A^T)^{-1} \\
&(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}
\end{aligned}
$$

dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

matrisleri için $A\cdot A^T = B^T$ olduğuna göre, a ve bin değeri nedir?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $A^T = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 4 & b \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 \\ 4 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+16 & a+4b \\ a+4b & 1+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$a^2 + 16 = 25$ ise $a = \pm 3$

$1 + b^2 = 25$ ise $b = \pm 1$

bulunur. Ama $a + 4b = -7$ denklemini $a = 3$ için $b = -\frac{5}{2}$ sağlamaz. Fakat $a = -3$ için $b = -1$ sağlar.

SİMETRİK ve TERS SİMETRİK MATRİSLER

1.21. Tanım: Bir kare matrisin her elemanı esas (asal) köşegene göre simetrik olan matrislere simetrik matris denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} x & m & t \\ m & y & n \\ t & n & z \end{bmatrix}$

Esas köşegen x, y, z olup m, t, n birer simetrik olduğundan A matrisi simetrik matristir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

Esas köşegen 2, 3, 8, 10 olup -1, 2, 0, 5, 7, 9 birer simetrik olduğundan simetrik matristir.

1.22. Tanım: Bir kare matrisin esas (asal) köşegen üzerindeki elemanları sıfır ve esas köşegene göre simetrik elemanların toplamı sıfır olan matrislere ters simetrik matris denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 0 & m & -t \\ -m & 0 & n \\ t & -n & 0 \end{bmatrix}$

Öğr. Gör. Saban YILMAZ

Esas köşegen 0 olup simetrik elemanların toplamı sıfır olduğundan A matrisi ters simetrik matristir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 5 & -7 \\ 2 & -5 & 0 & 9 \\ -8 & 7 & -9 & 0 \end{bmatrix}$

Esas köşegen 0 olup simetrik elemanların toplamı sıfır olduğundan A matrisi ters simetrik matristir.

1.13. Teorem: A bir kare matris olmak üzere,

i) $A^T = A$ ise A simetrik matristir

ii) $A^T = -A$ ise A ters simetrik matristir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin özelliği nedir?

Çözüm: $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ ve $A^T=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

olduğundan A matrisi simetrik matristir.

Örnek: $B=\begin{bmatrix} 12 & 3 & 6 \\ -3 & 9 & -11 \\ -6 & 11 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin özelliği nedir?

Çözüm: $B=\begin{bmatrix} 12 & 3 & 6 \\ -3 & 9 & -11 \\ -6 & 11 & 4 \end{bmatrix}=B^T$ ve $B^T=\begin{bmatrix} 12 & -3 & -6 \\ 3 & 9 & 11 \\ 6 & -11 & 4 \end{bmatrix}$

olduğundan B matrisi ters simetrik matristir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

1.14. Teorem: A bir kare matris olmak üzere,
i) $B = A + A^T$ ise $B^T = B$ yani B matrisi simetrik matris,
ii) $C = A - A^T$ ise $C^T = -C$ yani C matrisi ters simetrik matristir.

İspat:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \text{ve} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

olduğundan

$$\text{i) } B = A + A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+a_{11} & a_{12}+a_{21} & a_{13}+a_{31} & \cdots & a_{1n}+a_{n1} \\ a_{21}+a_{12} & a_{22}+a_{22} & a_{23}+a_{32} & \cdots & a_{2n}+a_{n2} \\ a_{31}+a_{13} & a_{32}+a_{23} & a_{33}+a_{33} & \cdots & a_{3n}+a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+a_{1n} & a_{n2}+a_{2n} & a_{n3}+a_{3n} & \cdots & a_{nn}+a_{nn} \end{bmatrix}$$

olup B matrisi simetrik matristir.

ii benzer şekilde gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisini simetrik ve ters simetrik matrise çeviriniz.

Çözüm: $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ olduğundan,

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

i) $B = A + A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 9 \\ 2 & 10 & 2 \\ 9 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ olup simetriktir

ii) $C = A - A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ 6 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ olup ters simetriktir.

1.15. Teorem: A ve B matrisleri simetrik (ters simetrik) olsunlar. AB nin simetrik (ters simetrik) olması için gerek ve yeter şart A ve B matrisleri değişmeli (ters değişmeli) matrisler olmalıdır.

İspat: $\Rightarrow$: A ve B matrisleri simetrik olsunlar. Bu takdirde,

$$(AB)^T = AB$$

dir. 1.12. Teorem ve 1.13. Teoreme göre,

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

dir. Buna göre, $AB = BA$ olacağından A ve B matrisleri değişmeli matrislerdir.

$\Leftarrow$: A ve B matrisleri değişmeli matrisler olsun. O halde $AB = BA$ dir. Ayrıca

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

dir. Buna göre A ve B matrisleri simetriktir. //

Bu teorem ters simetrik matrisler içinde geçerli olduğunun ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

ORTAGONAL MATRİSLER

1.23. Tanım: A bir kare matris olmak üzere, $A^T = A^{-1}$ ise A matrisine ortogonal matris denir.

Örnek: $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal olduğunu gösteriniz.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $C^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ve $C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
olduğundan C matrisi ortogonal matristir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

NORMAL MATRİSLER

1.24. Tanım: A bir kare matris olmak üzere, $AA^T = A^TA$ ise A matrisine normal matris denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin normal matris olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ olacağından

$$AA^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$AA^T = A^TA$ olduğundan A matrisi normal matristir. Ama bu A matrisi aynı zamanda simetri, ters simetri ve ortogonal matristir.

1.16. Teorem: A bir 2×2 normal matris olsun. O zaman A, ya simetriktir veya bir skaler matrisle bir ters simetrik matrisin toplamıdır.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

ÜÇGEN MATRİSLER

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

1.25. Tanım: Bir $A = [a_{ii}]_{n\times n}$ kare matrisinde, $i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise bu matrise üst üçgen matris; $i > j$ iken $a_{ij} = 0$ ise alt üçgen matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ veya } B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A üst üçgen matris, B alt üçgen matristir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ veya $B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

A alt üçgen matris, B üst üçgen matrislerdir.

1.17. Teorem: $A_{n\times n}$ ve $B_{n\times n}$ üst (alt) üçgensel matrislerinde;

i) $A + B$ matrisi
ii) kA matrisi
iii) AB matrisi
iv) $f(x)$ polinomu için $f(A)$ matrisi

birer üst (alt) üçgensel matrislerdir.

PERİYODİK MATRİSLER

1.26. Tanım: A bir kare matris olsun. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $A^{k+1} = A$ ise A matrisine periyodik matris denir. Periyodik matrislerde özel olarak $k = 1$ ise idempotent matris, $A^k = 0$ ise nilpotent matris denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin periyodunu bulunuz.

Çözüm: $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$=\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ -3 & 2 & 9\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ -3 & 2 & 9\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ -3 & 2 & 9\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ -3 & 2 & 9\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$=A$$

olduğundan periyodu $k = 2$ dir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 4 & -3\\ -5 & 5 & -4\end{bmatrix}$ ise A^2 yi bulunuz.

Çözüm: $A^2=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 4 & -3\\ -5 & 5 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 4 & -3\\ -5 & 5 & -4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}4+3-5 & -2-4+5 & 2+3-4\\ -6-12+9 & 3+16-15 & -3-12+12\\ -10-15+20 & 5+20-20 & -5-15+6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 4 & -3\\ -5 & 5 & -4\end{bmatrix}$$

$$=A$$

olduğundan periyodu $k = 1$ dir. Buna göre bu matris idempotent matristir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ matrisinin periyodunu bulunuz.

Çözüm: $A^2=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=A$$

olduğundan periyodu $k = 1$ dir. Buna göre bu matris idempotent matristir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin nilpotent matris olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A^3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan nilpotent matristir.

PERMÜTASYON MATRİSLER

1.27. Tanım: Her satırında ve sütununda yalız bir elemanı 1 ve diğer bütün elemanları 0 olan kare matrislere permütasyon matrisleri denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi bir permütasyon matrisidir.

Örnek: Her birim matris, bir permütasyon matrisidir.

DAİREVİ DÖNME MATRİSLER

1.28. Tanım: Her bir satırı, bir önceki satırın ileriye doğru terimlerinin bir adım dönmesiyle elde edilen ve ilk satırın bir dairevi pemürasyonu olan

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

biçimindeki matrisler, dairevi dönme matrislerdir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ bir dairevi dönme matrisidir.

Örnek: Her permütasyon matrisi bir dairevi dönme matrisidir.

BLOK MATRİSLERİ

1.29. Tanım: Yatay ve düşey doğruları kullanarak bir A matrisini birkaç parçaya ayırarak elde edilen matrise A'nın blokları (veya hücreleri) adı verilir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & \varphi & 5 & 3 \\ e & 2 & 2 & 10 & 8 \\ 2 & \pi & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ matrisi $A=\left[\begin{array}{ccc:cc} 4 & 1 & \varphi & 5 & 3 \\ e & 2 & 2 & 0 & 8 \\ \hdashline 2 & \pi & 3 & 0 & 7 \end{array}\right]$ biçiminde bloklara ayrılırsa;

$$A_1=\begin{bmatrix} 4 & 1 & \varphi \\ e & 2 & 2 \end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix} 2 & \pi & 3 \end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix} 0 & 7 \end{bmatrix}$$

olur.

1.30. Tanım: Bir A matrisi aşağıdaki şekildeki gibi blok matrisi olsun.

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \vdots & A_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Bu blok matrisini $A=\left[A_{ij}\right]_{m\times n}$ biçiminde gösterelim.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$A = [A_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [B_{ij}]_{m\times n}$ gibi iki blok matrisini alalım.

i) $A + B = [A_{ij}]_{m\times n} + [A_{ij}]_{m\times n} = [A_{ij} + B_{ij}]_{m\times n}$
ii) $kA = [kA_{ij}]_{m\times n}$

dir.

1.31. Tanım: $A = [A_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [A_{jk}]_{n\times p}$ şeklinde iki matrisi verilsin.

$$C_{ik} = \begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ \vdots \\ B_{nk} \end{bmatrix} = A_{i1}.B_{1k} + A_{i2}.B_{2k} + \dots + A_{in}.B_{nk} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot B_{jk}$$

toplamıyla bulunan $C = [C_{ik}]_{m\times p}$ matrisine A ile B blokl matrislerinin çarpımı denir ve

$$A \cdot B = [A_{ij}]_{m\times n}[B_{jk}]_{n\times p} = [B_{ik}]_{m\times p} = C$$

biçimindedir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ise AB'yi bulunuz.

Çözüm: Bu iki matrisi kolon matrislerine ayıralım.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olup A_2, A_3, B_2, B_3 birer sıfır matrislerdir. Buna göre;

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$A=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{bmatrix} & 0_{2\times3}\\ 0_{2\times2} & \begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\6 & 5 & 2\end{bmatrix}\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\2 & 3\end{bmatrix} & 0_{2\times2}\\ 0_{2\times3} & \begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

olacağından

$$AB=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\2 & 3\end{bmatrix} & 0_{2\times2}\\ 0_{2\times2} & \begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\6 & 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & -1\\26 & -1\end{bmatrix} & 0_{2\times2}\\ 0_{2\times2} & \begin{bmatrix}13 & 6\\30 & 18\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -1 & 0 & 0\\26 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 13 & 6\\0 & 0 & 30 & 18\end{bmatrix}$$

sonucu bulunur.

ECHELON (EŞELON) FORM YÖNTEMİ

1.30. Tanım: Bir $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ matrisi verilsin. Aşağıdaki tanımlanan işlemlere elementer satır (sütun) işlemleri denir.

i) $i\neq j$ olmak üzere S_i ve S_j satırları (sütunları) yer değiştirilebilir, $S_i \leftrightarrow S_j$ dir.

ii) $i\neq j$ ve $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere S_i ve S_j satırları (sütunları) için S_i satırı (sütunu) yerine

$$\alpha_1 S_i+\alpha_2 S_j$$

yazılabilir, $\alpha_1 S_i+\alpha_2 S_j\to S_i$ dir. (Burada kompleks sayı durumu söz konusu olduğunda kompleks sayı da alınabilir.)

Bu şekilde bir Bir $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin yazılmasına Echelon (Eşelon) yöntemini adı verilir.

Öğr. Gör. Saban YILMAZ

1.31. Tanım: Bir A matrisine elementer satır (sütun) işlemleri uygulandığında elde edilen B matrisi, A matrisine denktir denir. Bir $A \approx B$ ile gösterilir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 8\\ 3 & 7 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ matrisini Echelon yöntemi uygulayarak $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 48\\ 0 & 1 & -20\\ 0 & 0 & -113\end{bmatrix}$ matrisi elde ediniz.

Çözüm: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 8\\ 3 & 7 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$, $-3S_1 + S_2 \to S_1$ uygulanırsa

$\approx\begin{bmatrix}1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -20\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$, $-2S_1 + S_3 \to S_2$ uygulanırsa

$\approx\begin{bmatrix}1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -20\\ 0 & -5 & -13\end{bmatrix}$, $2S_2 + S_1 \to S_1$ uygulanırsa

$\approx\begin{bmatrix}1 & 0 & 48\\ 0 & 1 & -20\\ 0 & -5 & -13\end{bmatrix}$, $5S_2 + S_3 \to S_3$ uygulanırsa

$\approx\begin{bmatrix}1 & 0 & 48\\ 0 & 1 & -20\\ 0 & 0 & -113\end{bmatrix}=B$

bulunur.

ECHELON FORM YÖNTEMİ UYGULANARAK TERS MATRİSİN ELDE EDİLMESİ

1.18. Teorem: Bir Bir $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matrisi ile $I=\left[I_{ij}\right]_{n\times n}$ birim matrisinin birleşiminden oluşan $AI=\left[a_{ij} \vdots I_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisine Echelon yöntemi uygulanırsa,

$$IA^{-1}=\left[I_{ij} \vdots a_{ij}^{-1}\right]_{m\times n}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

matrisi elde edilir.

İspat: $AI = B$ matrisi olarak alalım. Burada $B = \left[a_{ij} \vdots I_{ij}\right]_{m\times n}$ yazılmaktadır.

$$B^{-1} = (AI)^{-1} = I^{-1}A^{-1} = IA^{-1}$$

olduğundan,

$$IA^{-1} = \left[I_{ij} \vdots a_{ij}^{-1}\right]_{m\times n}$$

matrisi elde edilir.

1.32. Tanım: Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisini $IA^{-1} = \left[I_{ij} \vdots a_{ij}^{-1}\right]_{m\times n}$ biçiminde yazıma kanonik biçim adı verilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin varsa tersini bulunuz.

Çözüm:

$$AI = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \ S_1 \leftrightarrow S_3 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \ S_2 + 3S_1 \to S_2, -2S_3 - 3S_1 \to S_3$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right], \ S_2 \leftrightarrow S_3 \text{uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right], \ \frac{1}{2}S_2 \leftrightarrow S_2 \text{uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right], \ S_3 + 4S_2 \to S_3 \text{ uygulanırsa}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\approx \left[\begin{array}{cccccc} -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots -1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right], \; S_2 + S_3 \to S_2, S_1 - 4S_3 \to S_1$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccccc} -2 & 0 & 0 & 16 & -4 & 13 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots -5 & 1 & -9/2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right], -\frac{1}{2}S_1 \to S_1, -S_2 \to S_2, -S_3 \to S_3$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & -13/2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots\ 5 & -1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 3/2 \end{array}\right]$$

bulunur. Buna göre,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -13/2 \\ 5 & -1 & 9/2 \\ 4 & -1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

dir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. Elemanları, $(\mathbb{Z}_{/5}, +, \cdot)$ olan,

$$A = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ -\overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \overline{1} & -\overline{2} \\ \overline{0} & \overline{2} \end{bmatrix}$$

matrisleri için de çarpma kuralı geçerli ise $A \cdot B$ çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{2} \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{4} \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{2} \end{bmatrix}$

Çözüm: $A \cdot B = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{4} \\ \overline{3} & \overline{1} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \overline{2} \cdot \overline{2} + \overline{1} \cdot \overline{3} & \overline{2} \cdot \overline{4} + \overline{1} \cdot \overline{1} \\ \overline{1} \cdot \overline{2} + \overline{0} \cdot \overline{3} & \overline{1} \cdot \overline{4} + \overline{0} \cdot \overline{1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{4} \end{bmatrix}$$

Cevap: D

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

2. $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ ise A^{300} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2)^{100}\cdot I$ B) $2^{100}\cdot I$ C) $3^{100}\cdot I$ D) $5^{100}\cdot I$ E) $7^{100}\cdot I$

Çözüm: $A^2=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -2 & -2\end{bmatrix}$

$$A^3=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{bmatrix}=(-8)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=(-2)^3 I$$

$$(A^3)^{100}=(-2\cdot I)^{100}=(-2)^{100}.I^{100}=2^{100}\cdot I$$

Cevap: B

3. $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}^{100}$ matrisinin sonucu $3^n I$ (I birim matris) ise n'nin değeri kaçtır?

A) 100 B) 200 C) 300 D) 400 E) 500

Çözüm: $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}=9\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}^2\right)^{50}=\left(9\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)^{50}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}^{50}=9^{50}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{50}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}^{100}=3^{100}I$$

Cevap: A

4. Bir $A_{m\times n}$ matrisi ve $B = A^T - A$ verilsin. B^T (transpozesi) ifadesinin sonucu nedir?

A) A B) B C) –A D) A^T E) –B

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $B^T = (A^T - A)^T = (A^T)^T - A^T = A - A^T = -B$

Cevap: E

5. $\begin{bmatrix} x & 5 \\ 10 & y \end{bmatrix}$ matrisinin tersi kendisine eşit olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $A = A^{-1}$ ve $A \cdot A^{-1} = I$ ise $A^2 = I$ dir.

$$\begin{bmatrix} x & 5 \\ 10 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 5 \\ 10 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x \cdot x + 5 \cdot 10 = 1$

$x = 7$

Cevap: C

6. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & x & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = [15]$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $[5 \cdot 2 - 2x + 3x + 4 \cdot 1] = [15]$

$x = 1$

Cevap: A

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & . \\ . & b \end{bmatrix}$ ise $a - b$ toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

$a = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 21$ ve $b = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 17$

$a - b = 21 - 17 = 4$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Cevap: B

8. $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = x^2 - 2x + 1$ toplamı aşağıdaki matrislerden hangisine eşittir?

A) $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ E) $7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Çözüm: $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ ise $f(A) = (A-I)^2$ dir.

$$A-I=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-I)^2=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\cdot 3-2\cdot 1 & 3\cdot 2+2\cdot 1 \\ -1\cdot 3-1\cdot 1 & -1\cdot 2+2\cdot 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Cevap: C

9. $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $(A+B)^T$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Çözüm:

$$A+B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Cevap: D

10. $\begin{bmatrix} 4x+y \\ -3x+2y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3x+y \\ 2x-y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

eşitliğini sağlayan xy nin değerleri aşağıdakilerden hangisidir?

Öğr. Gör. Şaban

A) 0 B) –1 C) 1 D) –2 E) 2

Çözüm: Matrislerde toplamadan

$$\begin{bmatrix} 4x+y \\ -3x+2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x+y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+2y \\ -x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Matrislerin eşitliği gereği

$$x + 2y = 5 \text{ ve } -x + y = 1$$

denklemleri elde edilir. Bu iki denklem çözülürse $x = 1, y = 2$ bulunur.

Cevap: E

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1975.
2. Hüseyin Bilgiç, Lineer Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş, 2015.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik III Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Üniversiteye Hazırlık Matematik Seti, Tümay Yayınları, İstanbul Yayıncılık, 2006, Ankara.
5. Seymeur LİPSCHUTZ Ph. Dr., Çev. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Serisinden Lineer Cebir, Japonya.
6. Yrd. Doç. Dr. Nezahat ÇETİN, Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 1074, AÖF Yayınları: 589, 1998, Eskişehir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ