4. BÖLÜM
PERMÜTASYONLAR

Permütasyon kelimesi Latince'de "yer değiştirme" anlamına gelen "permütare" sözcüğünden türediği bilinmektedir. Permütasyon kelimesi Türkçede "sıralama" anlamında kullanılmaktadır. Örneğin A, B ve C gibi üç nesnenin değişik sıralamaları ABC, ACB, BAC, BCA, CAB ve CBA şeklinde olacaktır. Buna göre değişik sıralamaların sayısı 6 dır.

SAYMANIN KURALLARI

1. Toplama Yoluyla Sayma

4.1. Tanım: A ve B kümeleri sonlu ve ayrık kümeler olsun. Bu kümelerin birleşiminin eleman sayısını bulmaya toplama yoluyla sayma denir.

4.1. Aksiyom: A ve B kümeleri sonlu ve ayrık kümelerin birleşimin eleman sayısı, kümelerin elemanların sayılarının toplamına eşittir. Buna göre,

$s(A)=m$, $s(B)=n$ ve $A\cap B=\varnothing$

olmak üzere,

$$s(A\cup B)=s(A)+s(B)=m+n$$

dir.

O halde, ayrı iki işlemden biri "m" farklı yolla diğeri "n" farklı yolla yapılıyorsa, bu işlemlerden biri veya diğeri "m + n" farklı yolla yapılabilir. Bu durum işlem sayısı arttığında da geçerlidir.

Toplama yoluyla saymanın en belirgin belirleyici özelliği "veya" kavramıdır.

Örnek: Bir sınıfta 11 gözlüklü, 25 gözlüksüz öğrenci vardır. Bu sınıftan 1 gözlüklü veya 1 gözlüksüz öğrenci kaç değişik yolla seçilebilir?

Çözüm: Gözlüklü öğrenci $s(A)=11$ türlü, gözlüksüz öğrenci $s(B)=25$ türlü seçilebilir. Şu halde 1 gözlüklü veya 1 gözlüksüz öğrenci,

$$s(A\cup B)=s(A)+s(B)=11+25$$

türlü seçilebilir.

Örnek: Avukat Mehmet Beyin 9 beyaz 7 mavi 4 siyah gömleği vardır. Mehmet Bey bir beyaz veya bir mavi veya bir siyah gömleği kaç yolla seçilebilir.

Çözüm: Beyaz gömlekler $s(B)=9$ türlü, mavi gömlekler $s(M)=7$ türlü, siyah gömlekler $s(S)=4$ türlü seçilebilir. Şu halde bir beyaz veya bir mavi veya bir siyah gömlek

$$s(B)+s(M)+s(S)=9+7+4=20$$

türlü seçilebilir.

2. Çarpma Yoluyla Sayma

4.2. Tanım: A ve B kümeleri sonlu ve ayrık kümeler olsun. Bu kümelerin kartezyen çarpımla eleman sayısını bulmaya çarpma yoluyla sayma denir.

4.2. Aksiyom: A ve B kümeleri sonlu ve ayrık kümelerin kartezyen çarpım eleman sayısı, kümelerin elemanların sayılarının çarpımına eşittir. Yani,

$s(A)=m$, $s(B)=n$ ve $A\cap B=\varnothing$ olmak üzere,

$$s(A\times B)=s(A).s(B)=m.n$$

dir.

O halde ilk işlem m yolla yapılabiliyorsa ve ilk işlem bu m yoldan birisiyle yapıldıktan sonra ikinci işlem n yolla yapılıyorsa; bu iki işlem birlikte m.n yolla yapılabilir. Bu durum işlem sayısı arttığında da geçerlidir.

Çarpma yoluyla saymanın en belirgin belirleyici özelliği “ve” kavramıdır.

Örnek: 3 pantolon 3 gömleği olan bir şahıs 1 pantolon ve 1 gömleği kaç farklı şekilde seçebilir?

Çözüm: Pantolonların kümesi $P = \{P_1, P_2, P_3\}$
Gömleklerin kümesi $G = \{G_1, G_2, G_3\}$

olsunlar. 1 pantolon ve 1 gömlekten oluşan ikililer,

$$P\times G=\{(P_1, G_1), (P_1, G_2), (P_1, G_3), (P_2, G_1), (P_2, G_2), (P_2, G_3), (P_3, G_1), (P_3, G_2), (P_3, G_3)\}$$

kümesidir. Şu halde Kartezyen çarpım gereğince,

$s(P) = 3$, $s(G) = 3$ ise $s(P\times G)=s(P).s(G)=3.3=9$

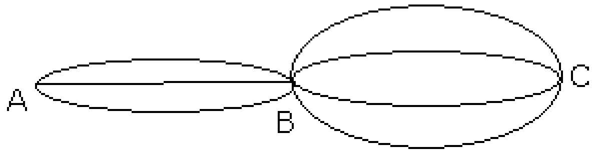
tanedir. Buna göre 3 pantolon 3 gömleği olan bir şahıs 1 pantolon ve 1 gömleği 9 farklı şekilde seçebilir.

Örnek: A şehrinden B şehrine 3, B şehrinden C şehrine 4 farklı yol vardır. A şehrinden C şehrine gitmek isteyen birinin, B şehrine uğramak şartıyla,

a) A şehrinden C şehrine kaç farklı şekilde gidilebilir?

b) A şehrinden C şehrine kaç farklı şekilde gidip dönebilir?

c) Gittiği yoldan dönmemek şartıyla A şehrinden C şehrine kaç farklı şekilde gidip dönebilir?



Çözüm: **a)** A dan çıkan bir yolcu 3 türlü B şehrine varır. B ye uğradıktan sonra C şehrine 4 türlü ulaşır. Bu durumda çarpma yoluyla sayma uygulanırsa,

$s(AB) = 3$, $s(BC) = 4$ ise $s(AB).s(BC) = 3.4 = 12$

bulunur.

b) A dan çıkan bir yolcu B ye uğradıktan sonra C ye 12 türlü geliyorsa, geri gelirken de yine 12 farklı seçenek karşısına çıkar. O halde gidiş ve dönüşte,

$s(AB).s(BC).s(CB).s(BA) = 3.4.4.3 = 144$

farklı şekilde yol tercih edilir.

c) A dan çıkan bir yolcu B ye uğradıktan sonra C ye 12 türlü gelebileceğini biliyoruz. Geri gelirken aynı yolu tercih edilmeyecekse kullanabilecekleri yol bir azalacağından, C den B ye $(4-1) = 3$ türlü, B den A ya $(3-1) = 2$ türlü seçebilme hakkı doğacaktır. Şu halde,

$$s(AB).s(BC).[s(BC)-1].[s(AB)-1] = 3.4.3.2 = 72$$

farklı şekilde yol tercih edilir.

3. Üstlü İfadeler Yoluyla Sayma

4.3. Tanım: A ve B kümeleri sonlu ve ayrık kümeler olsun. Bu kümelerin kartezyen çarpımın kuvvetiyle eleman sayısını bulmaya üstlü ifadeler yoluyla sayma denir.

4.1. Teorem: A kümesi sıralama yapılacak küme, B sıralanacak küme olsunlar. $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise, hiçbir şart aramadan yapılacak sıralama sayısı

$$s(A)^{s(B)} = m^n$$

kadar sıralama yapılır.

İspat: A kümesi sıralama yapılacak küme, B sıralanacak küme olsunlar. $A=\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ ve $B=\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ ise, b_1 elemanı hiçbir şart aramaksızın A kümesinden bütün elemanları sıralanacağından m türlü sıralanır. Yine b_2 elemanı hiçbir şart aramaksızın A kümesinden bütün elemanları sıralanacağından m türlü sıralanır. Bu şekilde devam edilince b_n elemanı hiçbir şart aramaksızın A kümesinden bütün elemanları sıralanacağından m türlü sıralanır. Şu halde kartezyen çarpım gereğince,

$$s(A)^{s(B)} = m^n$$

kadar sıralama yapılır.

Örnek: İnternette 7 farklı e–posta adresi olan bir şahıs 4 farklı e–postayı kaç farklı şekilde gönderilir.

Çözüm: Birinci e–posta 7 farklı şekilde gönderilir. Yine ikinci e–posta 7 farklı şekilde gönderilir. Yine üçüncü ve dördüncü e–posta 7 farklı şekilde gönderilir. O halde Kartezyen çarpım gereğince,

$$7.7.7 = 7^4$$

farklı şekilde gönderilir.

Örnek: 20 soruluk bir testte her sorunun 5 seçeneği vardır. Bu testin cevap anahtarı kaç farklı şekilde hazırlanabileceğini bulalım.

Çözüm: Her sorunun cevabı 5 değişik şekilde verilebilir. O halde 20 sorunun cevap anahtarı,

$$5^{20} = 95367431640625$$

kadardır.

Örnek: Spor toto oyununda 13 maçın hepsinin de doğru tahmin etmek için birbirinden farklı kaç kolon oynanması gerekir.

Çözüm: Spor totoda 13 tahmini maç skoru bulunmaktadır. Eğer bir maçta birinci takım yenerse 1, ikinci takım yenerse 2, berabere kalınırsa 0 yazılacaktır. 13 maç bu şekilde tahminde bulunulur. Her tahmine 1 kolon denilir. Eğer bir spor toto oyuncusu 13 maçı da tam bilirse para kazanır. Şu halde herhangi bir kolon için bileşenler 0, 1, 2 dir. Sıralı 13 lü olacağından,

$$3^{13} = 1594323$$

kolon oynanması gerekir.

PERMÜTASYON (SIRALAMA) FONKSİYONU

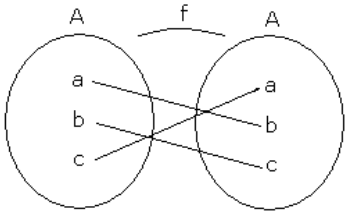
4.4. Tanım: A sonlu ve n elemanlı bir küme olmak üzere $f : A \to A$ tanımlanan birebir ve örten her fonksiyona A kümesinin bir permütasyonu denir.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kümesi için bir f permütasyon fonksiyonu,

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek: A = {a, b, c} olmak üzere A dan A ya tanımlanan fonksiyonlardan biri, $f=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ olsun. Bu f fonksiyonu A kümesinin bir permütasyonudur. Fonksiyonun görüntü kümesi (bca) sıralı üçlüsüdür.



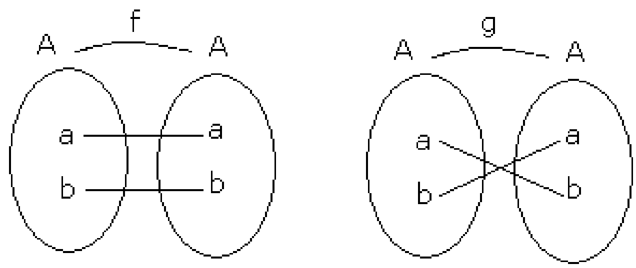
$f=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ fonksiyonu; f = {(a, b), (b, c), (c, a)} veya f = (bca) şeklinde gösterilir.
//

$f=(bca)$ permütasyonuna, A nın elemanlarının farklı sırayla dizilişlerinden biri de diyebiliriz. Öyleyse permütasyonun tanımı aşağıdaki biçimde de verebiliriz.

4.5. Tanım: Sonlu n elemanlı bir A kümesinin herhangi r elemanının $(r<n)$ yan yana dizilişinden (sıralanışından) her birine, n–nin r–li permütasyonu denir. Bu şekildeki farklı dizilişlerin sayısına da n–nin r–li permütasyonların sayısı denir.

Örnek: A = {a, b} kümesinin bütün permütasyonlarını bulalım.

Çözüm:



f = {(a, a), (b, b)} g = {(a, b), (b, a)}
veya veya

$f=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

dir. A kümesinin f = (ab) ve g = (ba) olan iki permütasyonu vardır. Buna göre 2 elemanlı bir kümenin permütasyon sayısı 2 dir.//

Şimdi permütasyon sayısını bulacak formülü verelim.

4.2. Teorem: n elemanlı bir A kümenin herhangi r elemanının $(r<n)$ yan yana sıralanış (diziliş) sayısı;

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

kadardır.

İspat: n elemanlı bir A kümesinin r elemanının yan yana sıralanışına bakalım. Bu r eleman $A\{a_1,a_2,\ldots,a_r\}$ kümesi olsun.

a_1 yerine n elemandan birisi,
a_2 yerine geriye kalan n−1 elemandan birisi,
a_3 yerine geriye kalan n−2 elemandan birisi,
...
...
a_r yerine geriye kalan n−(r−1) elemandan birisi gelebilir.

kartezyen çarpıma göre, n elemanın birbirinden farklı r−li sıralanış sayısı,

$$n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]$$

olur. Elde edilen çarpım (n−r)! İle çarpılıp bölünürse,

$$n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]\frac{(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

olacağından n elemanlı bir A kümesinin r elemanının tüm sıralanış sayısı,

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

olur.

Örnek: P(12, 4) işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $P(12,4)=\frac{12!}{(12-3)!}=\frac{12!}{9!}=12.11.10=1320$

Örnek: 8 koltuğa 4 kişi kaç farklı şekilde oturur. (Oturan kişi kalkmayacağı kabul etmeliyiz.)

Çözüm: Birinci kişi 8 koltuktan birini seçeceğinden 8 farklı şekilde oturabilir. İkinci kişiye 7 koltuktan birini seçme hakkı vardır. Şu halde ikinci şahıs 7 farklı şekilde oturabilir. Üçüncü kişiye 6 koltuktan birini seçme hakkı vardır. Buna göre üçüncü şahıs 6 farklı şekilde oturabilir. Dördüncü kişiye 5 koltuktan birini seçme hakkı vardır. Buna göre dördüncü şahıs 5 farklı şekilde oturabilir. Seçimde bir sıralama olduğundan permütasyon formülüne göre,

$$P(8,4)=\frac{8!}{(8-4)!}=\frac{8.7.6.5.4!}{4!}=8.7.6.5=1680$$

farklı şekilde oturabilir.

Örnek: 25 kişilik bir sınıftan 1 başkan 1 başkan yardımcı kaç farklı şekilde seçilebilir.

Çözüm: Bu sınıftan 1 başkan 25 farklı şekilde seçilebilir. Geriye 24 kişi kalmıştır. 1 başkan yardımcı 24 farklı şekilde seçilebilir. Seçimde bir sıralama olduğundan,

$$P(25,2)=\frac{25!}{(25-2)!}=\frac{25.24.23!}{23!}=25.24=600$$

farklı şekilde seçilebilir.

Örnek: İnternette 6 farklı e–posta adresi olan bir şahıs 3 farklı e–postayı her biri farklı e–postadan gönderilirse kaç farklı şekilde gönderilir.

Çözüm: Birinci kişi 6 e–posta adresinden birini seçeceğinden 6 farklı şekilde oturabilir. İkinci e–postaya 5 e–postadan birini seçme hakkı kalmıştır. Şu halde ikinci e–posta 5 farklı şekilde seçilebilir. Üçüncü e–postaya 4 e–postadan birini seçme kalmıştır. Buna göre üçüncü e–postaya 4 farklı şekilde seçilebilir. Seçimde bir sıralama olduğundan permütasyon formülüne göre,

$$P(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6.5.4.3!}{3!}=6.5.4=120$$

farklı şekilde seçilebilir.

Örnek: 7 kişiden yan yana gelmek şartıyla herhangi 4'ü kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebilirler.

Çözüm: 7 öğrenciden herhangi 4 ü (a, b, c, d) şeklinde sıralansınlar.
a sırası 7 öğrenciden birisi,
b sırası 6 öğrenciden birisi,
c sırası 5 öğrenciden birisi,
d sırası 4 öğrenciden birisi gelebilir. Buna göre 7 öğrencinin herhangi 4 ünin farklı sıralanışı permütasyon formülüne göre,

$$P(7,4)=\frac{7!}{(7-4)!}=\frac{7!}{3!}=\frac{7.6.5.4.3!}{3!}=7.6.5.4=840$$

kadardır.

4.1. Sonuç: n elemanlı bir A kümesinin tüm elemanlarının yan yana sıralanış (diziliş) sayısı;

$$P(n,n)=n!$$

kadardır.

Örnek: 6 kişinin yan yana sıralanarak kaç farklı şekilde poz verebilirler.

Çözüm: Permütasyon formülüne göre 6 kişinin 6'sıda sıralanacağından

P(6, 6) = 6! = 720

şekilde farklı sıralanabilirler.

Örnek: A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanları kullanarak rakamları birbirinden farklı, 4 basamaklı kaç değişik sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm: Permütasyon gereğince 6 sayıdan 4 basamaklı

$$P(6,4)=\frac{6!}{(6-4)!}=\frac{6!}{2!}=\frac{6.5.4.3.2!}{2!}=360$$

şekilde farklı yazılabilirler. Yalnız 0 sayısı başa gelince 4 basamaklı sayı olmaz. Halbuki bu 360 sayının içerisinde ilk rakamı 0 olan sayılar da vardır. Bu sayılar,

$$\frac{360}{6}=60$$

tanedir. Şu halde,

$$P(6,4)-60=360-60=300$$

tane farklı 4 basamaklı sayı yazılır.

Örnek: 4 farklı Matematik kitabı, 5 farklı Tarih kitabı aynı tür kitaplar yan yana gelmek üzere kaç farklı yerleştirilir.

Çözüm: Matematik kitapları P(4,4) = 4! , Tarih kitapları P(5,5) = 5! Şeklinde yerleştirilir. Birde bu kitaplar sağ tarafa Matematik sol tarafa Tarih veya sağ taraf Tarih sol tarafa Matematik kitapları konulabileceğinden P(2,2) = 2! şeklinde ayrıca bir yerleşim daha vardır. Şu halde bu kitaplar,

4!5!2! = 5760

farklı yerleştirilebilir.

Örnek: 7 Bilgisayar kitabından 3 ü, 4 Elektronik kitabından tamamı seçilerek bir kitaplığa kaç farklı şekilde dizilebilir.

Çözüm: 7 Bilgisayar kitabından 3 ü $P(7,3)=\frac{7!}{(7-3)!}=210$ ve 4 Elektronik kitabından tamamı P(4,4) = 4! şekilde dizilebilirler. Ayrıca bu kitaplar sağ ve sol ayrı ayrı dizilme gerçekleşeceğinden,

P(7,3).P(4,4).P(2,2) = 210.24.2 = 10080

farklı şekilde dizilebilirler.

4.2. Sonuç: a) $P(n,0)=1$

b) $P(n,1)=n$

c) $P(n,n-1)=n$

Örnek: P(n, 4) = 8.P(n, 3) denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $n \in \mathbb{N}$ olduğundan

$$\frac{n!}{(n-4)!}=8\frac{n!}{(n-3)!}$$

$$\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}=8\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}$$

$$n-3=8$$

$$n=11$$

bulunur.

Örnek: 2P(n, 2) + 50 = P(2n, 2) denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $n\in\mathbb{N}$ olduğundan

$$2\frac{n!}{(n-2)!}+50=\frac{(2n)!}{(2n-2)!}$$

$$2\frac{n.(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}+50=\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{(2n-2)!}$$

$$2n.(n-1)+50=(2n)(2n-1)$$

$$2n^2-2n+50=4n^2-2n$$

$$50=2n^2$$

$$n=5$$

bulunur.

Örnek: Aralarında Furkan ve Burak'ın bulunduğu bir grup öğrenci bir sırada oturacaklardır. Furkan ve Burak yan yana gelmemek üzere 6.7! değişik şekilde oturabildiklerine göre, bu grubun kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm: Bütün öğrenciler n tane olsun. Furkan ve Burak yan yana gelmeyeceklerine önce yan yana gelme durumlarını inceleyelim. Furkan ve Burak'ı 1 kişi düşünecek olursak, $n-1$ öğrenci kalmış olur. Şu halde Furkan ve Burak yan yana gelme durumunda sağ ve sol değişimi olacaklarından

$$P(n-1,n-1)P(2,2)=(n-1)!.2!$$

dir. Ayrıca bütün öğrenciler $P(n,n)=n!$ sıralanacağından, Furkan ve Burak'ın yan yana gelmeme durumları,

$$n!-(n-1)!.2!=6.7!$$

$$n(n-1)!-(n-1)!.2!=6.7!$$

$$(n-1)!(n-2)=6.7!$$

$$n=8$$

olarak bulunur.

PERMÜTASYONUN ÖZEL DURUMLARI

Yukarıdaki örneklerde soruları permütasyon formülü kullanarak çözdük. Bu formülü kullanırken

$$n.(n-1).(n-2)...[n-(r-1)]$$

kullandığımız fark etmişinizdir. Şimdi bu ifadesindeki bazı özel durumları kullanarak soruları çözelim.

Örnek: $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak anlamlı veya anlamsız 4 harfli,

a) Kaç değişik kelime,

b) Harfleri birbirinden farklı kaç farklı kelime,

c) Sesli bir harfle başlayıp sesli bir harfle biten harfleri birbirinden farklı kaç değişik kelime,

d) Sesli bir harfle başlayıp sessiz bir harfle biten harfleri birbirinden farklı kaç değişik kelime,

e) İçerisinde b'nın mutlaka bulunduğu kaç değişik kelime,

f) c ile başlayıp f ile bitmeyen kaç değişik kelime,

g) a ile başlayıp d ile biten, harfleri tekrarsız kaç değişik kelime yazılabileceğini bulalım.

Çözüm: **a)** 7 harften oluşan kümede hiçbir şart aramaksızın yapılacak 4 harfli kelime sayısı üstlü ifade yoluyla sayma yapılırsa,

1. harf 7 farklı şekilde
2. harf 7 farklı şekilde
3. harf 7 farklı şekilde
4. harf 7 farklı şekilde

olacağından 7.7.7.7 = 7^4 = 2401 şekilde yazılabilir.

b) Permütasyon gereğince,

1. harf 7 farklı şekilde
2. harf 1 harf kullanıldığından 6 farklı şekilde
3. harf 2 harf kullanıldığından 5 farklı şekilde
4. harf 3 harf kullanıldığından 4 farklı şekilde

olacağından 7.6.5.4 için

$$P(7,4)=\frac{7!}{(7-4)!}=\frac{7!}{3!}=7.6.5.4=840$$

şekilde yazılır.

c) 1. harf {a, e} den biri olacağından 2 farklı şekilde

4. harfte 1. harfte sesli harfin biri kullanıldığından 1 farklı şekilde

2. harf {b, c, d, f, g} den biri olacağından 5 farklı şekilde

3. harfte 2. harfte sesli harfin biri kullanıldığından 4 farklı şekilde

olacağından 2.5.4.1 için

2.5.4.1 = 40

şekilde yazılır.

d) 1. harf {a, e} den biri olacağından 2 farklı şekilde
4. harf {b, c, d, f, g} den biri olacağından 5 farklı şekilde
2. harfte 1 sesli 1 sessiz harf kullanıldığından 5 farklı şekilde
3. harfte 3 harf kullanıldığından 4 farklı şekilde
olacağından 2.5.4.5 için
2.5.4.5 = 200
şekilde yazılır.

e) b harfinin bulunmayacağı $\{a, c, d, e, f, g\}$ kümesinden 4 harf,
1. harf 6 farklı şekilde
2. harf 6 farklı şekilde
3. harf 6 farklı şekilde
4. harf 6 farklı şekilde
üstlü ifade yoluyla sayma gereği 6.6.6.6 = 6^4 bulunur. Yazılabilecek 4 harfli kelime sayısı ise 7^4 olduğundan içerisinde b harfinin mutlaka bulunduğu 4 harfli kelime sayısı,
$7^4 - 6^4 = 1106$
olarak bulunur.

f) Harfleri tekrar etmesinde bir sakınca olmayıp c ile başlayıp f ile bitmeyen,
1. harf c mutlaka olacağından 1 türlü
4. harfte f bulunmayacağından 6 farklı şekilde
2. harf 7 farklı şekilde
3. harf 7 farklı şekilde
olacağından 1.7.7.6 için
1.7.7.6 = 294
şekilde yazılır.

g) Harfleri tekrarsız olacağından a ile başlayıp d ile biten
1. harf a olacağından 1 türlü
4. harf d olacağından 1 türlü
2. harfte 1. ve 4. harfte 2 harf kullanıldığından 5 farklı şekilde
3. harfte 3 harf kullanıldığından 4 farklı şekilde
olacağından 1.5.4.1 için
1.5.4.1 = 20
şekilde yazılır.

Örnek: A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesinin elemanlarını kullanarak 3 basamaklı,
a) Kaç değişik sayı,
b) Rakamları birbirinden farklı kaç farklı sayı,
c) Kaç değişik tek sayı,
d) Her rakam bir defa kullanılmak üzere kaç değişik çift sayı,

e) Rakamları tekrarsız 400 ile 600 arasında (600 hariç) kaç değişik sayı,
f) 300'den büyük, 5 ile bölünebilen rakamları tekrarsız kaç değişik sayı,
g) 340 den büyük, rakamları tekrarsız kaç değişik sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm: **a)** Rakamları tekrarlı,
Yüzler basamağı 0 hariç 6 rakamdan biri
Onlar basamağı 7 rakamdan biri
Birler basamağı 7 rakamdan biri
yazılabileceğinden
6.7.7 = 294
sayı yazılabilir.

b) Rakamları tekrarsız,
Yüzler basamağına 0 hariç 6 rakamdan biri
Onlar basamağına yüzler basamağında 1 rakam kullanıldığından geriye kalan 6 rakamdan biri
Birler basamağına yüzler ve onlar basamağında 2 rakam kullanıldığından geriye kalan 5 rakamdan biri yazılabileceğinden
6.6.5 = 180
sayı yazılabilir.

c) Rakamları tekrarlı,
Birler basamağına {1,3,5} den biri olacağından 3 türlü
Yüzler basamağına 0 kullanılmayacağından 6 türlü
Onlar basamağına 7 türlü rakam yazılabileceğinden
6.7.3 = 126
sayı yazılabilir.

d) Son rakamı {0} ve {2, 4, 6} olmak üzere iki kategoride inceleyeceğiz.

Her rakam bir defa kullanılmak üzere son rakam 0 gelirse,
Birler basamağına 1 rakam
Yüzler basamağına 6 rakamdan biri
Onlar basamağına yüzler ve birler basamağında 2 rakam kullanıldığından geriye 5 rakamdan biri yazılacağından
6.5.1 = 30
sayı yazılabilir.

Son rakam {2, 4, 6} den biri olmak üzere,
Birler basamağına 3 rakamdan biri
Yüzler basamağına o gelmeyeceğinden ve birler basamağında 1 rakam kullanıldığından geriye kalan 5 rakamdan biri
Onlar basamağına yüzler ve birler basamağında 2 rakam kullanıldığından geriye 5 rakam yazılacağından

5.5.3 = 75
sayı yazılabilir. Şu halde,
30 + 75 = 105
sayı yazılabilir.

e) Rakamları tekrarsız 400 ile 600 arasında (600 hariç) kaç değişik sayı,
Yüzler basamağına {4,5} rakamlarından biri olup 2 rakamdan biri
Onlar basamağına yüzler basamağından 1 rakam kullanıldığından geriye kalan 6 rakamdan biri
Birler basamağına yüzler ve onlar basamağından 2 rakam kullanıldığından geriye kalan 5 rakamdan biri yazılır. Şu halde,
2.6.5 = 60
sayı yazılabilir.

f) 300'den büyük, 5 ile bölünebilen sayılar {3, 4, 5} ile başlar {0, 5} ile biter.

Son rakamı 0 olduğunda
Birler basamağına 1 rakam
Yüzler basamağına {3, 4, 5, 6} den biri olup 4 rakamdan biri
Onlar basamağına yüzler ve birler basamağında 2 rakam kullanıldığından geriye 5 rakamdan biri yazılır. Şu halde,
4.5.1 = 20
sayı yazılabilir.

Son rakamı 5 olduğunda
Birler basamağına 1 rakam
Yüzler basamağına {3, 4, 6} den biri olup 3 rakamdan biri
Onlar basamağına yüzler ve birler basamağında 2 rakam kullanıldığından geriye 5 rakamdan biri yazılır. Şu halde,
3.5.1 = 15
sayı yazılabilir. Şu halde,
20 + 15 = 35
tane sayı yazılabilir.

g) 340 den büyük, rakamları tekrarsız sayıları önce 340 ile 400 sonra 400 den büyük sayıları incelemeliyiz.

340 ile 400 arası
Yüzler basamağına sadece {3} olacağından 1 rakam
Onlar basamağına {3, 4, 5} dan biri kullanılacağından 3 rakamdan biri
Birler basamağına yüzler ve binler basamağında 2 rakam kullanıldığından geriye kalan 5 rakamdan biri yazılır. Şu halde,
1.3.5 = 15
sayı yazılabilir.

400 den büyük sayılar

Yüzler basamağına sadece {4, 5, 6} olacağından 3 rakam

Onlar basamağına yüzler basamağında 1 rakam kullanıldığından geriye kalan 6 rakamdan biri

Birler basamağına yüzler ve binler basamağında 2 rakam kullanıldığından geriye kalan 5 rakamdan biri yazılır. Şu halde,

$3.6.5 = 90$

sayı yazılabilir. Şu halde,

$15 + 90 = 105$

tane sayı yazılır.

İKİ PERMÜTASYON FONKSİYONUN BİLEŞKESİ

4.6. Tanım: $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ kümesinde tanımlı $f:A\to A$ ve $g:A\to A$ permütasyon fonksiyonları,

$$f=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix} \text{ ve } g=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ g(a_1) & g(a_2) & \dots & g(a_n) \end{pmatrix}$$

olmak üzere, f ve g fonksiyonunun bileşkesi

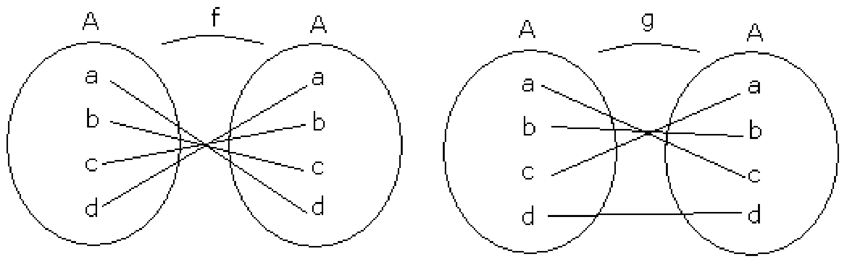
$$f\circ g=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f[g(a_1)] & f[g(a_2)] & \dots & f[g(a_n)] \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Örnek: A = {a, b, c, d} kümesi üzerinde iki permütasyon fonksiyonu,

$$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \text{ ve } g=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu iki fonksiyonun bileşkesi,



$$f[g(a)]=f(c)=b,\ f[g(b)]=f(b)=c,\ f[g(c)]=f(a)=d,\ f[g(d)]=f(d)=a$$

yani,

$$f\circ g=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

bulunur.

Örnek: $A=\{1,2,3,4\}$ olmak üzere A dan A ya

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix} \text{ ve } g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$

iki fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f\circ g$ yi bulalım.

Çözüm: $f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$

Bileşke işlemine sağdaki g fonksiyonundan başlayıp sonra f de inceleyelim.

g de $1\to 2$ iken f de $2\to 1$ olup $f\circ g$ da $1\to 1$

g de $2\to 3$ iken f de $3\to 2$ olup $f\circ g$ da $2\to 2$

g de $3\to 4$ iken f de $4\to 4$ olup $f\circ g$ da $3\to 4$

g de $4\to 1$ iken f de $1\to 3$ olup $f\circ g$ da $4\to 3$

bulunur. O halde,

$$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$$

dir.

BİRİM PERMÜTASYON FONKSİYONU

4.7. Tanım: $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ kümesinde tanımlı $I:A\to A$,

$$I=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\dots&a_n\\a_1&a_2&\dots&a_n\end{pmatrix}$$

şeklindeki permütasyona birim (etkisiz) permütasyon fonksiyonu denir. Birim fonksiyonu gereği,

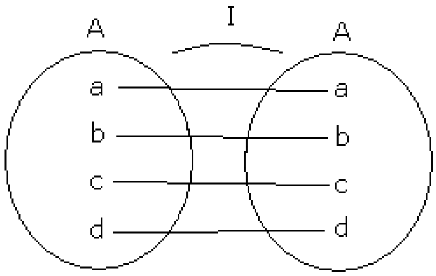
$$f\circ I=I\circ f=f$$

özelliği vardır. Bu özellikten dolayı I permütasyon fonksiyonu bileşke fonksiyonuna göre birim elemanıdır.

Örnek: A = {a, b, c, d} kümesinde tanımlı $I:A\to A$,

$$I=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&b&c&d\end{pmatrix}$$

permütasyonu birim permütasyon fonksiyonudur.



Örnek: A = {a, b, c, d} kümesinde tanımlı $f:A\to A$ ve $I:A\to A$,

$$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \text{ ve } I=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

permütasyon fonksiyonları tanımlansın. Buna göre,

$$f\circ I=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

elde edilir.

BİR PERMÜTASYON FONKSİYONUNUN TERSİ

4.8. Tanım: $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ kümesinde tanımlı $f:A\to A$ ve $f^{-1}:A\to A$ permütasyon fonksiyonları verilsin. Eğer,

$$f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=f$$

olacak şekilde f ve f^{-1} fonksiyonları varsa, f permütasyon fonksiyonunun tersi f^{-1} permütasyon fonksiyonunudur denir.

Örnek: A = {1, 2, 3} kümesinde tanımlı $f:A\to A$ ve $f^{-1}:A\to A$,

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } f^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permütasyon fonksiyonları tanımlansın. Buna göre,

$$f\circ f^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=I$$

elde edilir.

Örnek: $A=\{1,2,3,4\}$ olmak üzere A dan A ya $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ fonksiyonunda f^{-1} i bulalım.

Çözüm: Bir fonksiyonun tersini bulurken tanım kümesi ile değer kümesi yer değişecektir. Bu yüzden permütasyon fonksiyonunun 2. satırı ile 1. satırı yer değişmelidir.

$$f^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Örnek: A = {a, b, c, d} kümesinde tanımlı $f:A\to A$,

$$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$$

verilsin. f permütasyon fonksiyonunun tersini bulmalım. Bir f fonksiyonda

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi bu kurala göre,

$$f^{-1}=\begin{pmatrix} b & d & a & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ veya } f^{-1}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$$

elde ederiz.

TEKRARLI PERMÜTASYON

4.9. Tanım: $n\in\mathbb{N}$, n elemanlı bir kümenin n_1 tanesi aynı türden, n_2 tanesi bir başka türden $n_1, n_2, ..., n_r$ tanesi bir başka türden ve $n_1+n_2+...+n_r=n$ ise bu tür sıralanışa tekrarlı permütasyon denir.

4.4. Teorem: $n \in \mathbb{N}$, n elemanlı bir kümenin n_1 tanesi aynı türden, n_2 tanesi bir başka türden, ... , n_r tanesi bir başka türden ve $n_1+n_2+...+n_r=n$ olsun. Bu n elemanlı yerlerin değiştirilmesiyle oluşan farklı sıralanışların sayısı;

$$P(n,n_{1,2,...,r})=\frac{n!}{n_1 n_2 ... n_r}$$

kadardır.

İspat: n elemanlı bir kümenin n_1 tanesi aynı türden, n_2 tanesi bir başka türden, ... , n_r tanesi bir başka türden ve $n_1+n_2+...+n_r=n$ olsun. Aynı türden elemanların yer değişmesi herhangi bir değişikliğe sebep olmayacağından,

n_1 elemanın yer değişimi $n_1!$ olup bu sayı genel sıralamadan çıkarılmalıdır
n_2 elemanın yer değişimi $n_2!$ olup bu sayı genel sıralamadan çıkarılmalıdır
...
n_r elemanın yer değişimi $n_r!$ olup bu sayı genel sıralamadan çıkarılmalıdır

O halde n elemanlı kümenin farklı sıralanışların sayısı;

$$P(n,n_1,n_2,...,n_r)=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

kadardır.

Örnek: İLİM kelimesinden anlamlı veya anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir.

Çözüm: Önce formül kullanmadan yapalım. İLİM kelimesinde "İ" harfi 2 tane olduğundan anlamlı veya anlamsız,

{İLİM, İLMİ, LİMİ, LİİM, MİLİ, MİİL, İİLM, İİML, MLİİ, LMİİ, İMLİ, İMİL}

olacak şekilde 12 farklı kelimesi yazılabilir. Bu işlemi formülle yapacak olursak,

$$P(4,2,1,1)=\frac{4!}{2!.1!.1!}=12$$

elde edilir.

Örnek: 10 oyuncak 2, 3 ve 5 yaşlarındaki üç çocuğa yaşları ile orantılı olarak kaç farklı dağıtım yapılacaktır.

Çözüm: 10 oyuncak 2, 3 ve 5 yaşlarındaki üç çocuğa yaşları ile orantılı olarak

$$P(10,2,3,5)=\frac{10!}{2!.3!.5!}=3780$$

farklı şekilde ağıtım yapılacaktır.

Örnek: Aynı özelliğe sahip 3 mavi, 4 kırmızı ve 2 yeşil top yan yana dizileceklerdir.

a) Bütün toplar kaç farklı şekilde dizilebilirler.
b) Mavi toplar bir arada olacak şekilde kaç farklı şekilde dizilebilirler.

Çözüm: **a)** Aynı renkteki bilyelerin yer değişmesi farklı değişim olmayacağından

$$P(9,3,4,2)=\frac{9!}{3!.4!.2!}=1260$$

farklı diziliş olacaktır.

b) Mavi toplar bir arada olacağından 3 ünü 1 eleman gibi düşünelim. Ayrıca 4 kırmızı ve 2 yeşil top olduklarından,

$$P(7,1,4,2)=\frac{7!}{1!.4!.2!}=105$$

tanedir. Yalnız mavi topların kendi aralarında yer değiştirmeleri yeni bir diziliş olmayacaklardır.

Örnek: MUSTAFA kelimesinin harfleri ile 7 harfli,

a) Anlamlı veya anlamsız kaç kelime yazılabilir.
b) Bu kelimelerin kaç tanesinin M ile başlayıp A ile bittiğinin bulunuz.

Çözüm: **a)** MUSTAFA kelimesinde A harfi 2 tane, diğer harfler 1 tanedir. Buna göre,

$$P(7,2,1,1,1,1,1)=\frac{7!}{2!.1!.1!.1!.1!.1!}=2520$$

tane anlamlı veya anlamsız kelime yazılır.

b) Kelimeler M ile başlayıp A ile biteceğine göre, M ile A arasına geriye kalan U,S,T,A,F harfleri sıralanacaktır.

M						A

Bu 5 harfin sıralanış sayısı,

$$\frac{5!}{1!.1!.1!.1!.1!}=120$$

tanedir.

Örnek: 1110052 rakamları ile 7 basamaklı,

a) Kaç sayı yazılabileceğini,
b) Kaç çift sayı yazılabileceğini,
c) 2 000 000 dan büyük kaç sayı yazılabileceğini bulunuz.

Çözüm: a) 1. yol: 1110052 sayısında 3 tane 1, 2 tane 0 ve 1 tane 5 ve 1 tane 2 vardır. Buna göre,

$$P(7,3,2,1,1)=\frac{7!}{3!.2!.1!.1!}=420$$

değişik şekilde sıralama vardır. Ama bu sıralamanın arasında 0 ile başlayan sayılar da vardır. Hâlbuki 0 ile başlayan 7 basamaklı sayı 7 basamaklı değildir. Şimdi 0 ile başlayan sayıları tespit etmeliyiz.

0						

0 ile başlayan 0 ın sağına geriye kalan 1,1,1,0,5,2 rakamları sıralanacaktır. Şu halde,

$$P(6,3,1,1,1)=\frac{6!}{3!.1!.1!.1!}=120$$

tane sıralanış sayısı vardır. Buna göre,

$$P(7,3,2,1,1)-P(6,3,1,1,1)=420-120=300$$

tane 7 basamaklı sayı elde edilir.

2. yol: 1110052 sayısının rakamları her bir basamağa eşit sayıda geldiğinden ve bu sayının 7 rakamından 5 i sıfırdan farklı olduğundan bu sayının rakamlarının 420 sıralanışından $\frac{5}{7}$ si sıfırdan farklı bir rakamla başlar. Buna göre

$420.\frac{5}{7}=300$ tane 7 basamaklı sayı yazılabilir.

b) Önce 0 ile biten çift sayıların kaç tane olduğunu bulalım. 0 ın önüne geriye kalan 1, 1, 1, 0, 5, 2 sıralanacaktır.

					0

Bu 6 rakamın sıralanış sayısı,

$$\frac{6!}{3!.1!.1!.1!}=120$$

dir.

Şimdi 0 ile başlayıp 0 ile biten sıralanışların sayısını bulmak için iki 0 ın arasına geriye kalan 1, 1, 1, 5, 2 sıralanacaktır.

0				0

Bu beş rakamın sıralanış sayısı,

$$\frac{5!}{3!.1!.1!}=20$$

dir. Buna göre, 120–20 = 100 tane 0 ile biten çift sayı vardır.

Şimdi de 2 ile biten çift sayıların kaç tane olduğunu bulalım. 2 nin önüne geriye kalan 1, 1, 1, 0, 0, 5 sıralanacaktır.

					2

Bu 6 rakamın sıralanış sayısı,

$$\frac{6!}{3!.2!.1!}=60$$

dir.

0 ile başlayıp 2 ile bitenlerin sayısını bulmak için 0 ile 2 arasına geriye kalan 1, 1, 1, 0, 5 sıralanacaktır. Bu 5 rakamın sıralanış sayısı,

0				2

Bu 5 rakamın sıralanış sayısı,

$$\frac{5!}{3!.1!.1!}=20$$

dir. Buna göre 60–20 = 40 tane 2 ile biten çift sayı vardır. O halde toplam 100 + 40 = 140 tane 7 basamaklı çift sayı yazılır.

c) 2 000 000 dan büyük sayıların milyonlar basamağına 2 veya 5 gelmelidir. 1110052 sayısının rakamlarının 420 sıralanışından $\frac{2}{7}$ si 2 veya 5 ile başlar. Buna göre $420.\frac{2}{7}=120$ tane 2 000 000 dan büyük sayı yazılır.

DAİRESEL PERMÜTASYON (DÖNEL SIRALAMA)

4.10. Tanım: $n \in \mathbb{N}$, n elemanlı bir kümenin elemanlarının, bir çember üzerindeki farklı sıralanışlarının her birine dairesel permütasyon (dönel sıralama) denir.

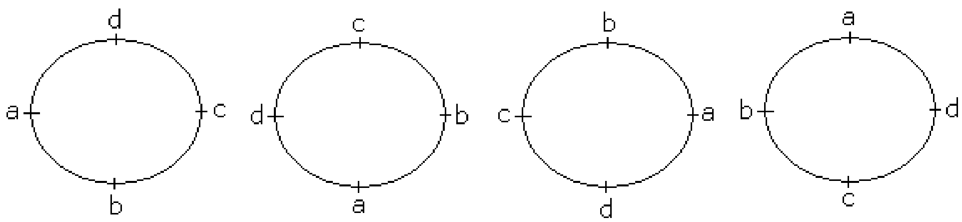
4.5. Teorem: $n \in \mathbb{N}$, n elemanlı bir A kümesinin bir daire etrafında oluşturulan dairesel permütasyon sayısı,

$$P(n-1,n-1)=(n-1)$$

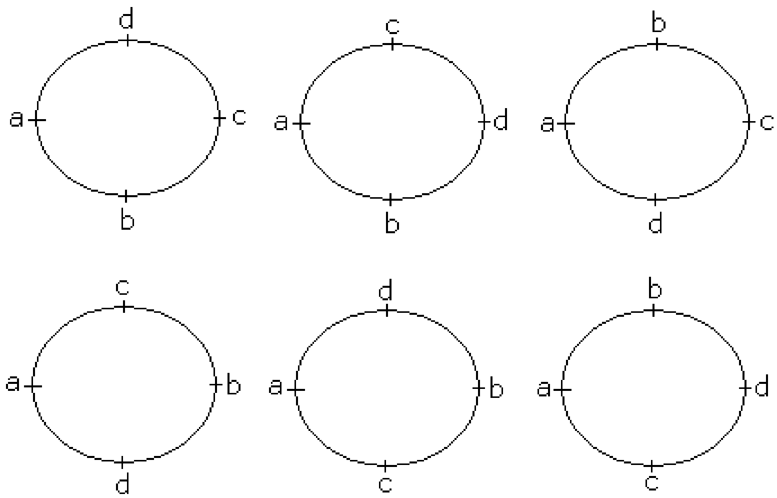
kadardır.

İspat: Sonlu n elemanlı bir kümenin elemanları bir dairesel şekilde bulunsunlar. Kümenin elemanlarından herhangi birinin çember üzerinde yerini değiştirmemek üzere sabit noktaya konulduğunu düşünelim. Geriye kalan $n-1$ elemanın her permütasyonu farklı bir sıralanış verecektir. Bunun dışındaki her sıralanış ise öncekilerin bir tekrarı olur. O halde birbirinden farklı sonlu n elemanın dairesel permütasyonları sayısı $(n-1)!$ dir.

Örnek: A = {a, b, c, d} kümesinin elemanlarının dairesel masa etrafında aşağıdaki sıralanışı aşağıdaki gibi ise,



bu sıralanışların hepsi aynıdır. Çünkü her elemanının sağındaki ve solundaki aynı olacaklarından bu dört sıralanış tek sıralanış kabul edilir. Ama,



şeklinde sıralanışlar farklıdır. Buna göre 4 elemanın 6 sıralanışı vardır. Bu sıralanış dairesel permütasyon formülü ile yaparsak,

$$(4-1)!=3!=6$$

yine aynı 6 elde ederiz.

Örnek: 6 Kimya mühendisi bir yuvarlak masa etrafında yaptıkları toplantıda kaç farklı şekilde oturabilirler.

Çözüm: Önce bir kimya mühendisini sabit bir yere yerleştirelim. Geriye kalan şahıslar bu mühendisin etraflarında $(n-1)!$ farklı biçimde yerleşeceklerinden

$$(n-1)! = (6-1)! = 5! = 120$$

şekilde oturabilirler.

Örnek: Anne, baba ve 5 çocuk meydana gelen bir aile yuvarlak bir masa etrafında oturacaklardır.

a) Kaç değişik şekilde oturabileceklerini,

b) En küçük çocuk anne ve babanın ortasında olmak üzere kaç değişik şekilde oturabileceklerini

c) Anne ve baba yan yana gelmemek şartıyla kaç değişik şekilde oturabileceklerini bulalım.

Çözüm: **a)** 7 kişilik bir aile yuvarlak bir masa etrafında hiçbir şart aramaksızın,

$$(n-1)! = (7-1)! = 6! = 720$$

değişik şekilde oturabilir.

b) En küçük çocuk anne ve babanın ortasında olacağına göre, anne, baba ve en küçük çocuk bir eleman olarak düşünülürse geriye kalan 4 çocuk ile 5 eleman olarak bulunur. Bu 5 eleman yuvarlak bir masa etrafında,

$$(n-1)! = (5-1)! = 4! = 24$$

değişik biçimindedirler. Ayrıca anne ve baba kendi aralarında yer değiştirebileceklerinden 2! = 2 şekilde yer değiştirebilirler. Buna göre,

$$(5-1)!.2! = 24.2 = 48$$

değişik şekilde oturabilirler.

c) Önce anne ve babanın yan yana olduğu oturuşların sayısını bulalım. Anne ve baba bir eleman olduğu düşünülürse, geriye bir yuvarlak masa etrafında $(6-1)! = 5! = 120$ değişik şekilde oturabilirler. Ayrıca anne ve baba kendi aralarında 2! = 2 farklı yer değiştirebilirler. Buna göre anne ve babanın yan yana olduğu 120.2 = 240 biçimde farklı oturabilirler.

Diğer taraftan bu ailenin yuvarlak masa etrafında tüm farklı oturuşlarının sayısı $(7-1)! = 6! = 720$ kadardır. Buna göre anne ve babanın yan yana olmadığı oturuşların sayısı,

720–240 = 480

kadardır.

Örnek: 4 Matematik, 3 Fizik, 2 Kimya öğretmenlerinin bir yuvarlak masa etrafında, aynı branştan olan öğretmenler yan yana olmak şartıyla kaç değişik şekilde oturabilirler.

Çözüm: 3 farklı branş söz konusudur. Her branş bir kategori olarak alınırsa, $(3-1)!=2!$ dir. Ayrıca her branştaki öğretmenlerde kendi aralarında yer değişeceklerinden,

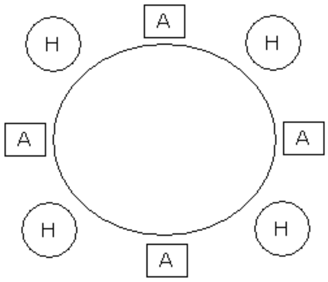
Matematik öğretmenleri $P(4,4) = 4!$
Fizik öğretmenleri $P(3,3) = 3!$
Kimya öğretmenleri $P(2,2) = 2!$

dir. Buna göre aynı branştan olan öğretmenler yan yana olmak şartıyla,

$$2!.4!.3!.2!=576$$

farklı şekilde oturabilirler.

Örnek: 4 avukat 4 hâkim bir yuvarlak masa etrafında aralarında her branş kendi aralarında diğer branş oturmak şartıyla kaç farklı şekilde oturabilirler.



Çözüm: Önce 4 avukat yuvarlak masa etrafında

$$(4-1)! = 3!$$

değişik şekilde oturabilirler. Hâkimler de avukatların arasında kalan 4 yere 4! değişik şekilde oturabilirler. Buna göre, 4 avukat ile 4 hakim bir yuvarlak masa etrafında herhangi iki avukatın arasında bir hakim olmak şartıyla,

$$3!.4! = 144$$

değişik şekilde oturabilirler.

4.6. Teorem: n elemanlı bir A kümesinin tersine çevrilebilir dairesel permütasyon varsa bu permütasyon sayısı,

$$\frac{P(n-1,n-1)}{2}=\frac{(n-1)!}{2}$$

kadardır.

İspat: Sonlu n elemanlı bir kümenin elemanları bir dairesel permütasyon sayısı,

$$P(n-1,n-1)=(n-1)!$$

kadar olduğunu biliyoruz. Eğer dairesel sıralanışı tersine çevrilebiliyorlarsa aynı tür sıralanış sayısı 2 katına çıkacaktır. Şu halde bu durumda n elemanlı bir kümenin permütasyon sayısı,

$$\frac{P(n-1,n-1)}{2}=\frac{(n-1)!}{2}$$

kadardır.

Örnek: Yuvarlar bir anahtarlıkta 8 tane anahtar kaç farklı şekilde sıralanabilirler.

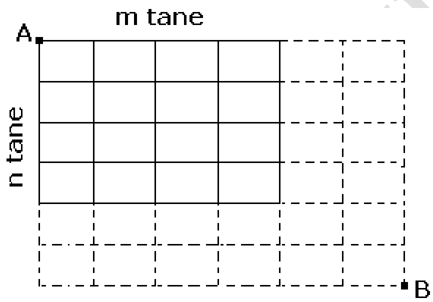
Çözüm: n = 8 olduğundan,

$$\frac{P(n-1,n-1)}{2}=\frac{(n-1)!}{2}=\frac{(8-1)!}{2}=2520$$

şekilde farklı sıralanabilirler.

PERMÜTASYONLA EN KISA YOLU BULMA

4.7. Teorem:



Şekildeki gibi bir tarafı m kenarlı yol diğer tarafı n kenarlı yol olan bir bölgede A dan B ye gitmek isteyen şahıs en kısa,

$$\frac{(m+n)!}{m!.n!}$$

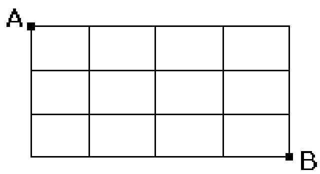
farklı şekilde gidebilir.

İspat: A dan B ye m ve n tane farklı yol varsa, A dan B ye $(m+n)!$ tane yol seçilebilir. Ama yollar şekildeki gibi ise $m!.n!$ tane yol tekrar kullanılacağından bu yol sayısı çıkarılmalıdır. O halde A dan B ye gitmek isteyen şahıs en kısa,

$$\frac{(m+n)!}{m!.n!}$$

farklı şekilde gidebilir.

Örnek:



A dan hareket eden bir şahıs B noktasına gitmek için bir kenarı 4 sokaklı diğer kenarı 3 sokaklı olan sokaklardan geçmelidir. A dan B ye en fazla kaç farklı şekilde gidebilir.

Çözüm: $\frac{(4+3)!}{4!.3!}=35$ farklı şekilde gidebilir.