1. BÖLÜM
FAİZ

FAİZ KAVRAMI

İktisat ve işletme hayatının önemli konularından biri de faiz, kâr payı ve enflasyon işlemleridir. Kâr payı ve enflasyon tanımları faizden farklı olsa da matematik işlemleri faizdeki gibi yapılır. Biz burada faizi anlatacağız, kâr payı ve enflasyon işlemlerin okuyucuya bırakılmıştır.

1.1. Tanım: Bir malın kullanım hakkını belirli süre için başkasına bırakmasına, o malın kiralanması denir. Kiralanan malın getirdiği gelire de kira geliri denir. Sermayenin (anaparanın) kullanım hakkının belirli bir süre için bir başkasına bırakılmasıyla elde edilen kira gelirine faiz denir. Buna göre faiz, sermayenin getirdiği gelir olarak tanımlanır. Faiz miktarı sermayenin büyüklüğüne, faiz oranına ve sermayenin kullanım süresine bağlı olarak değişir. Enflasyon ve gecikme zammı faiz işlemlerinin benzeri yöntemlerle yapılır. Buna göre faiz paranın zamana göre değeri olarak adlandırılır.

Faiz işlemleri şu şekilde sınıflandırılır:

1– Basit Faiz
  a. İç (Difere) Faiz İşlemleri
  b. Dış (Antisipe) Faiz İşlemleri
2– Bileşik Faiz

Faiz konusunda ayrıntıya girmeden önce likidite ve cari getiri kavramlarını açıklamakta fayda vardır.

1. Likidite: Finansal veya reel bir varlığı zamanında ve değerinde değer kaybetmeksizin paraya dönüştürülmesi.

2. Cari Getiri: Sermayenin kısa süreli getirisi.

Şimdi bu faiz çeşitlerinin ayrı ayrı durumlarını inceleyelim:

BASİT FAİZ İŞLEMLERİ

Basit faiz, Sermayeye bir defada uygulanan faiz çeşididir. Genellikle kısa süreli işlemlerde kullanılır.

Basit faiz hesaplarında bir yıllık süre 365 gün üzerinden alınırsa buna tam (gerçek) faiz denir, 360 gün üzerinden alınırsa buna pratik (ticari) faiz denir. Günümüzde pek çok kamu ve özel sektörde çözümün kolay olması amacıyla ticari faiz tercih edilmekte ve bir yıl 360 gün olarak alınmaktadır. Ticari faiz hesaplarında 1 ay 30 gün olmaktadır. Hâlbuki bazı aylar 28, 29, 31 gün olmaktadır. Ama ticari hayatta da pratik faiz kullanılmaktadır. Faiz işlemlerinde özel durum gerekmedikçe 1 ay 30 gün üzerinden işlem yapılır.

Faiz hesaplarında vade (süre) çok önemlidir. Bu nedenle süre belirli bir sabit ifade üzerinden yapılmaktadır. Verilen süreler genellikle yıl üzerine çevrilmektedir. Yıl üzerine çevrilmeden de yapılabilir. Ama biz bu konuda verilen sürelerin yıl üzerinden yapılmasını anlatacağız. Bu çerçevede verilen sürelerin yıla çevrilmesi şu şekildedir.

Örneğin 5 ay denilince $t = \frac{5}{12}$, 4 ay denilince $t = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, 72 gün denilince $t = \frac{72}{360} = \frac{1}{5}$, 90 gün denilince $t = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ akla gelmelidir. Ayrıca $\frac{3}{4}$ yıl denilince $t = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$ yani 9 ay olarak bulunur. //

Basit faizde, sermaye (anapara), faiz oranı, süre ve faiz tutarı olmak üzere dört önemli unsur bulunmaktadır. Buna göre şu aksiyomu ortaya çıkarabiliriz.

1.1. Aksiyom: A sermaye (anapara), n faiz oranı, t zaman ve F faiz tutarı olmak üzere,

$$F = A.n.t$$

şeklindedir.

Örnek: 4 500 lira 2 yıl sonra %20 den kaç lira faiz getirir?

Çözüm: A = 4 500 ₺ , n = %20 = 0,20 $= \frac{20}{100}$, t = 2 yıl olduğundan

$$F = 4\,500 \cdot \frac{20}{100} \cdot 2 = 1\,800 \text{ ₺}$$

dir.

Örnek: Bir bankanın vadeli mevduata uyguladığı faiz oranı % 18 dir. Bu bankada 500 ₺ hesap açtıran bir kişinin 60 günde elde edeceği faiz gelirini pratik faize ve tam faize göre hesaplayınız.

Çözüm: A = 500 ₺ , $n = \frac{18}{100}$

a. Pratik faize göre, $t = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ olacağından

$$F = A \cdot n \cdot t = 500 \cdot \frac{18}{100} \cdot \frac{60}{360} = 15{,}00 \text{ ₺}$$

dir.

b. Gerçek faize göre, $t = \frac{60}{365}$ olacağından

$$F = A \cdot n \cdot t = 500 \cdot \frac{18}{100} \cdot \frac{60}{365} = 14{,}79 \text{ ₺}$$

dir.

Örnek: Bir banka vadeli mevduata yatırılan 4 000 ₺ ye 6 ay sonra 240 ₺ faiz veriliyor. Bu bankada vadeli mevduata uyguladığı faiz oranını bulunuz.

Çözüm: A = 4 000 ₺ , $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, F = 240 ₺ ise

$$240 = 4\,000 \cdot n \cdot \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{24}{2\,000} = 0{,}12$$

$$n = \%12$$

bulunur.

Örnek: Bir bankadan alınan 6 000 ₺ para yıllık % 20 faizle 300 ₺ faiz oluşuyor. Bu bankadan alınan faizin süresi ne kadardır?

Çözüm: A = 6 000 ₺ , F = 300 ₺ , $n = \frac{20}{100}$ ise

$$300 = 6\,000 \cdot \frac{20}{100} \cdot t$$

$$t = \frac{3}{12}$$

olup 3 ay olarak bulunur.

Örnek: Yıllık % 30 faiz oranı üzerinden banka yatırılan bir miktar para kaç ay sonra kendisini 2/5 i kadar faiz getirisi sağlar?

Çözüm: A sermaye, $n = \frac{30}{100}$, $F = \frac{2}{5}A$ ise,

$$\frac{2}{5}A = A \cdot \frac{30}{100} \cdot t$$

$$t = \frac{2}{5} \cdot \frac{100}{30} = \frac{4}{3} = \frac{16}{12}$$

olur ki, bu bize 16 ay olduğunu gösterir. //

Faiz tutarının yatırılmış olduğu sürenin sonunda veya başında alınması bakımından basit faiz ikiye ayrılır. Bunlar iç ve dış faizlerdir. Şimdi bunları inceleyelim:

İÇ FAİZ (BALİĞ) İŞLEMLERİ

1.2. Tanım: Sermayenin bugünkü değer üzerinden işlem yapılan faize iç faiz denir. Buna göre iç faiz, sermaye ile faiz tutarının toplamını oluşturur. Basit iç faize baliğ ya da difere faiz olarak da adlandırılır. Buna göre iç faiz sermayenin gelecekteki değeridir. B_i ile gösterilir. O halde baliğin formülü;

$$B_i = A + F = A + A \cdot n \cdot t = A(1 + n \cdot t)$$

olarak bulunur.

Örnek: Bir bankaya % 20 den yatırılan 8 000 ₺ para, 144 gün sonra kaç lira olarak geri çekilir?

Çözüm: $A = 8\,000$ ₺, $n = \%20 = 0{,}20 = \frac{20}{100}$, $t = \frac{144}{360} = \frac{2}{5}$

$$B_i = A(1 + n \cdot t) = 8\,000\left(1 + \frac{20}{100} \cdot \frac{2}{5}\right) = 8\,640 \text{ ₺}$$

Örnek: Bir bankaya yatırılan 12 000 ₺ 4 ay sonra 12 480 ₺ ye ulaşmıştır. Bankanın verdiği faiz oranını bulunuz.

Çözüm: $B_i = 12\,480$ ₺, $A = 12\,000$ ₺, $t = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$$B_i = A(1 + n \cdot t)$$

$$12\,480 = 12\,000\left(1 + \frac{n}{3}\right)$$

$$\frac{12\,480}{12\,000} = 1 + \frac{n}{3}$$
$$1{,}04 = 1 + \frac{n}{3}$$
$$0{,}04 = \frac{n}{3}$$
$$n = 0{,}12$$

olur ki bu bize %12 olduğunu gösterir.

Örnek: Bir bankaya yıllık %16 faiz oranı üzerinden 3 aylığına yatırılan bir miktar para bu sürenin sonunda bankadan 936 ₺ olarak çekilmiştir. Buna göre bankaya yatırılan anapara ne kadardır?

Çözüm: $B_i = 936\text{ ₺}, t = \frac{3}{12} = 0{,}25, n = \frac{16}{100} = 0{,}16$

$$B_i = A(1 + n \cdot t)$$
$$936 = A\left(1 + \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{4}\right)$$
$$936 = A \cdot \frac{26}{25}$$
$$A = 936 \cdot \frac{25}{26}$$
$$A = 900\text{ ₺}$$

DIŞ FAİZ İŞLEMLERİ

1.3. Tanım: Sermayenin gelecekteki değer üzerinden işlem yapılan faize dış faiz denir. Dış faiz, faiz tutarı sermaye üzerinden hesaplanarak sürenin başında peşin olarak kesilmesi anlamına gelir. Antisipe faiz de denir. Sermaye ile faiz tutarının çıkarılmasından oluşturur. Bunlara peşin değer adı da verilir. B_d ile gösterilir. Buna göre peşin değerin formülü;

$$B_d = A - F = A - A \cdot n \cdot t = A(1 - n \cdot t)$$

olarak bulunur.

Örnek: Bir bankadan 6 aylığına alınması planlanan 5 200 ₺ lik krediye %10 faiz ödeyeceği belirtilmiştir. Dış (antisipe) faiz uygulayan bu banka, bu şahsa kaç lira verir?

Çözüm: $A = 5\,200\text{ ₺}, n = \%10 = 0{,}10 = \frac{10}{100}, t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ise,

$$B_d = A(1 - n \cdot t) = 5\,200\left(1 - \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{2}\right) = 4\,940\text{ ₺}$$

Örnek: Bir bankadan yıllık %10 faizle 9 aylığına bir miktar para çekilmek istenmiştir. Bu bankadan 8 325 ₺ olarak para çekiliyor. Bu bankadan talep edilen miktar ne kadardır?

Çözüm: $B_d = 8\,325 ₺,\ n = \frac{10}{100} = \frac{1}{10},\ t = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$$B_d = A(1 - n \cdot t)$$
$$8\,325 = A\left(1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{4}\right)$$
$$8\,325 = A\frac{37}{40}$$
$$A = 8\,325 \cdot \frac{40}{37}$$
$$A = 9\,000 ₺$$

Örnek: Bir bankadan 10 000 ₺ talep eden şahsa 6 ay sonra ödemek şartıyla dış faizle 9 500 ₺ veriyor. Bu bankanın uyguladığı yıllık faiz oranını bulunuz.

Çözüm: $A = 10\,000 ₺, B_d = 9\,500 ₺ ₺,\ t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$$B_d = A(1 - n \cdot t)$$
$$9\,500 = 10\,000\left(1 - n \cdot \frac{1}{2}\right)$$
$$n = 0{,}10 \text{ yani } \%\,10$$

Örnek: Bir bankadan 6 000 ₺ %10 faizle dış faiz uygulayarak 5 700 ₺ olarak alınıyor. Buna göre bankadan alınan bu paranın süresi ne kadardır?

Çözüm: $A = 6\,000 ₺\ B_d = 5\,700 ₺, n = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

$$B_d = A(1 - n \cdot t)$$
$$5\,700 = 6\,000\left(1 - t \cdot \frac{1}{10}\right)$$
$$\frac{5\,700}{6\,000} = 1 - \frac{t}{10}$$
$$\frac{t}{10} = 1 - \frac{5\,7}{60} = \frac{3}{60}$$
$$t = \frac{30}{60} = \frac{6}{12}$$

6 ay olarak bulunur.

Örnek: Bir x bankasından 120 günlüğüne, 90 000 ₺ talep eden şahsa dış faiz uygulaması ile %25 le ödeme yapılıyor. Bu iç faiz uygulaması ile 90 000 ₺ borçlanacak şekilde ödeme yapılsaydı, yüzde oranı ne olmalıydı?

Çözüm: $A = 90\,000$ ₺ $n = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}, t = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$

Önce dış uygulayalım.

$$B_d = A(1 - n \cdot t)$$
$$B_d = 90\,000\left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}\right) = 82\,500 \text{ ₺}$$

olur. Bankaya 82 500 ₺ talep edilse ve 90 000 ₺ baliğ olsaydı, bu durumdaki faiz oranı;

$$B_i = A(1 + n \cdot t)$$
$$90\,000 = 82\,500\left(1 + n \cdot \frac{1}{4}\right)$$
$$\frac{90\,000}{82\,500} = 1 + \frac{n}{3}$$
$$\frac{90\,000}{82\,500} = 1 + \frac{n}{3}$$
$$1{,}0909 = 1 + \frac{n}{3}$$
$$n = 0{,}2727$$
$$\%27{,}27$$

bulunur.

YILIN GÜNLERE GÖRE FAİZİ

Verilen iki tarih arasındaki gün sayısının hesaplanmasında iki yöntem olduğu yukarıda belirtildi. İlk yöntem; verilen iki tarih arasındaki tüm günlerin dâhil edildiği "tam faiz" yöntemidir. İkinci yöntem ise; ayların 30, yılın 360 gün olarak kabul edildiği "pratik faiz" yöntemidir. Örneğin, 15 Haziran 20xx tarihi ile 18 Ekim 20xx tarihleri arasındaki gün sayısı iki yönteme göre şu şekilde bulunur;

Tam faiz yöntemine göre;

Haziran	15 gün
Temmuz	31 gün
Ağustos	31 gü
Eylül	30 gün
Ekim	18 gün
Toplam	125 gün

Pratik faiz yöntemine göre;

Haziran	15 gün
Temmuz	30 gün
Ağustos	30 gün
Eylül	30 gün
Ekim	18 gün
Toplam	123 gün

Pratik faiz tutarı, gerçek faiz tutarından büyüktür. Bu iki faiz tutarı arasındaki fark Δ ve gün sayısı t_1 ile gösterirsek,

$$\Delta = F_{360} - F_{365}$$
$$= A \cdot n \cdot \frac{t_1}{360} - A \cdot n \cdot \frac{t_1}{365}$$
$$= \frac{5 \cdot A \cdot n \cdot t_1}{360 \cdot 365}$$
$$= \frac{A \cdot n \cdot t_1}{72 \cdot 365}$$

bulunur.

Örnek: İki banka çalışanı, yıllık %20 faiz oranı ile hesapladıkları 72 günlük faiz tutarı arasında 40 ₺ fark bulmuşlardır. Bu farkın, çalışanların yılı pratik ve tam faiz hesaplamasından kaynaklandığı anlaşılmıştır. Bankaya yatırılan para tutarı ne kadardır?

Çözüm: $\Delta = 40₺,\ n = 0{,}20,\ t_1 = 72$

$$\Delta = \frac{A \cdot n \cdot t_1}{72 \cdot 365}$$
$$40 = \frac{A \cdot 0{,}2 \cdot 72}{72 \cdot 365}$$
$$A = \frac{40 \cdot 365}{0{,}2}$$
$$A = 73\ 000\ ₺$$

KISMİ ÖDEMELER

Kredi kullananlar kredi nedeniyle yüklenmiş oldukları faizi azaltmak için kredinin maliyet süresince ara ödemelerde bulunabilirler. Bu durumda herhangi bir tarihte veya borcun vade tarihinde hesap bakiyesinin ortaya konulması gerekmektedir. Herhangi vade tarihte borç bakiyesi iki yöntemle hesaplanır. Bunlar merchants (tüccat) yöntemi ile bileşik devletler yöntemidir.

1. Merchants (Tüccar) Yöntemi: Bu yöntemde alınan kredinin ve kısmi ödemelerin kredinin vade günündeki değerleri hesaplanır. Sonra da alınan kredi ile ödemelerin farklı alınarak kalan değeri bulunur.

Örnek: 1 Temmuzda 20 000 ₺ kredi kullanan biri şahıs aynı yıl içerisinde 30 Ağustosta 5 000 ₺, 29 Eylülde 6 000 ₺ ödeme yapmıştır. Faiz oranı %12 olduğuna göre kreşinin son günü olan 29 Ekimde kaç lira ödemelidir.

Çözüm: Temmuz ayından 30 gün, Ağustos ayından 31 gün, Eylül ayından 30 gün ve Ekim ayından 29 günlük toplam 120 gün kredi kullanılmıştır.

5 000 ₺ ödendiğinde 60 gün geçmiştir.
6 000 ₺ ödendiğinde 30 gün daha geçmiştir.

$$B_i = A(1 + n \cdot t) = 20\,000\left(1 + \frac{12}{100} \cdot \frac{120}{360}\right) = 20\,800 \text{ ₺}$$
$$B_1 = A(1 + n \cdot t) = 5\,000\left(1 + \frac{12}{100} \cdot \frac{60}{360}\right) = 5\,100 \text{ ₺}$$
$$B_2 = A(1 + n \cdot t) = 6\,000\left(1 + \frac{12}{100} \cdot \frac{30}{360}\right) = 6\,060 \text{ ₺}$$

$$\begin{aligned} \text{29 Ekim kalan borç} &= B_i - (B_2 + B_2) \\ &= 20\,800 - (5\,100 + 6\,060) \\ &= 9\,640 \text{ ₺} \end{aligned}$$

olur.

2. Birleşik Devletler Yöntemi: Azalan bakiyeler yöntemi olarak adlandırılan bu yöntem faizi ödenmeyen borç üzerinden hesaplanır. Şöyle ki, ,önce alınan kredinin ilk ara ödemeye kadarki faizi hesaplanır ve hesaplanan bu değerden ilk ara ödeme düşülür. Sonra kalan için ikici ara ödemeye kadar faiz yürütülür. İkinci ara ödeme bu değerden düşülür. İşleme vade tarihine kadar benzer şekilde devam edilir.

Yukarıdaki örneği birleşik devletler yöntemiyle de çözelim.

$$B_i = A(1 + n \cdot t) = 20\,000\left(1 + \frac{12}{100} \cdot \frac{60}{360}\right) = 20\,400 \text{ ₺}$$
$$B_i = 20\,400 - 5\,000 = 15\,400 \text{ ₺}$$

$$B_1 = 15\,400\left(1 + \frac{12}{100} \cdot \frac{30}{360}\right) = 15\,554 \text{ ₺}$$
$$B_1 = 15\,554 - 6\,000 = 9\,554 \text{ ₺}$$

29 Ekimde toplam kalan borç

$$B_2 = 9\,554\left(1+\frac{12}{100}\cdot\frac{30}{360}\right) = 9\,649{,}54 \text{ ₺}$$

olur.

BASİT REEL FAİZ

1.4. Tanım: Paranın alım gücünün düşmesinden oluşan zamana göre değerine enflasyon denir. Basit faizin enflasyon farkından çıkarılmasından oluşan faiz miktarına basit reel (gerçek) faiz denir. F_r ile gösterilir.

Örnek: Yıllık %8 enflasyonun olduğu bir dönemde yıllık %15 faiz veren bir bankanın uyguladığı yıllık basit reel faiz,

$$\%15 - \%8 = \%7$$

dir.

Örnek: Üç aylık mevduata %10 faiz uygulayacağını bildiren bir banka üç ay enflasyon % 7 ise üç aylık basit reel faiz,

$$\%10 - \%7 = \%3$$

dır.

1.1. Teorem: Sermaye (anapara) (A), faiz oranı (n), zaman (t), enflasyon oranı (m) ile gösterilmek üzere basit reel faiz,

$$F_r = A\cdot t\cdot (n-m)$$

biçimindedir.

İspat: Basit faiz işleminin baliği $B_i = A\cdot(1+n\cdot t)$ dir. Basit enflasyon işleminin baliği $B_i = A\cdot(1+m\cdot t)$ şeklindedir. Buna göre basit faiz ile basit enflasyon arasındaki fark,

$$F_r = A\cdot t\cdot n - A\cdot t\cdot m = A\cdot t\cdot (n-m)$$

olur.

Örnek: Yıllık %10 enflasyonun olduğu bir dönemde yıllık % 15 faiz veren bir bankaya basit faizle 3 000 ₺ yatıran bir şahıs 6 ay sonundaki oluşan reel faiz miktarını bulunuz.

Çözüm: $A = 3\,000$ ₺ , $n = \frac{15}{100}$, $m = \frac{10}{100}$, $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$$F_r = A\cdot t\cdot (n-m)$$

$$= 3\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{100} - \frac{10}{100}\right)$$
$$= 75₺$$

Örnek: Yıllık %25 faizle bankaya yatırılan 4500 ₺ para 6 ay sonunda 112,50 ₺ reel faiz getirmiştir. Bu dönemdeki yıllık enflasyon oranı nedir?

Çözüm: $A = 4\,500$ ₺ , $n = \frac{25}{100}$, $m = \frac{20}{100}$, $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$$F_r = A \cdot t \cdot (n - m)$$
$$112{,}50 = 4\,500 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{100} - m\right)$$
$$m = 0{,}20$$

Buna göre %20 enflasyon olduğu tespit edilir. //

Reel faiz de şu şekilde yaklaşım yapılarak da elde edilmektedir.

$$\text{Reel Faiz} = \frac{\text{Devre Faiz Oranı}+1}{\text{Devre Enflasyon Oranı}+1} - 1$$

Örnek: Yıllık %10 enflasyonun olduğu bir dönemde yıllık %20 faiz veren bir bankanın uyguladığı yıllık basit reel faiz,

$$F_r = \frac{20+1}{10+1} - 1 = 0{,}909$$
%9,09

dir. Bu örnek ilk formüle göre yapıldığında $20 - 10 = 10$ çıkması gerekirken bu yöntemle %9,09 bulunmaktadır.

ORTALAMA FAİZ ORANI

1.2. Teorem: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ler sermayeler $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ler süreler (zamanlar) ile $n_1, n_2, \ldots, n_n$ ler faiz oranları olmak üzere birden fazla faiz tutarları;

$$F_1 = A_1 \cdot n_1 \cdot t_1,\ F_2 = A_2 \cdot n_2 \cdot t_2, \ldots, F_n = A_n \cdot n_n \cdot t_n$$

verilmiş olsun. Bu takdirde bütün bu faizlerin ortalama faiz oranı;

$$n = \frac{A_1 n_1 t_1 + A_2 n_2 t_2 + \cdots + A_n n_n t_n}{A_1 t_1 + A_2 t_2 + \cdots + A_n t_n}$$

şeklindedir.

Teoremin ispatı ağırlıklı aritmetik ortalamadan aşikârdır.

Örnek: 200 ₺ %20 faiz oranı ile 60 gün
300 ₺ %15 faiz oranı ile 90 gün
400 ₺ %10 faiz oranı ile 30 gün
faizde bırakılmıştır. Paranın tamamını yüzde kaçtan faize verseydik aynı faiz toplamını elde edebilirdik.

Çözüm: $A_1 = 200$ ₺, $n_1 = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, t_1 = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$
$A_2 = 300$ ₺, $n_2 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}, t_2 = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$
$A_3 = 400$ ₺, $n_2 = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, t_2 = \frac{30}{360} = \frac{1}{12}$
olacağından,

$$n = \frac{200\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+300\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{4}+400\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{12}}{200\cdot\frac{1}{6}+300\cdot\frac{1}{4}+400\cdot\frac{1}{12}} = 0{,}15$$

elde edilir. Bu ise % 15 olduğunu gösterir.

Örnek: 1 000 ₺ %12 faiz oranı ile 4 ay
1 200 ₺ %15 faiz oranı ile 3 ay
1 500 ₺ %10 faiz oranı ile 6 ay
faizde bırakılmıştır. Paranın tamamını yüzde kaçtan faize verseydik aynı faiz toplamını elde edebilirdik.

Çözüm: $A_1 = 1\,000$ ₺, $n_1 = \frac{12}{100}, t_1 = \frac{4}{12}$
$A_2 = 1\,200$ ₺, $n_2 = \frac{15}{100}, t_2 = \frac{3}{12}$
$A_3 = 1\,500$ ₺, $n_3 = \frac{10}{100}, t_3 = \frac{6}{12}$
olacağından,

$$n = \frac{1\,000\cdot\frac{12}{100}\cdot\frac{4}{12}+1\,200\cdot\frac{15}{100}\cdot\frac{3}{12}+1\,500\cdot\frac{10}{100}\cdot\frac{6}{12}}{1\,000\cdot\frac{4}{12}+1\,200\cdot\frac{3}{12}+1\,500\cdot\frac{6}{12}} = 0{,}15$$

elde edilir. Bu ise %15 olduğunu gösterir.

ORTALAMA VADE

1.3. Teorem: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ler sermayeler $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ler vadeler ve bütün sermayeler için faizler aynı olmak üzere verilmiş olsun. Bu takdirde bütün bu faizlerin ortalama vade oranı;

$$t = \frac{A_1t_1+A_2t_2+\cdots+A_nt_n}{A_1+A_2+\cdots+A_n}$$

şeklindedir.

Teoremin ispatı ağırlıklı aritmetik ortalamadan aşikârdır.

Örnek: 200 ₺ 60 gün
300 ₺ 90 gün
500 ₺ 120 gün
süreli faize bırakılmış ise bu sermayelerin toplamı için ortalama vade nedir?

Çözüm: $A_1 = 200$ ₺, $t_1 = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$
$A_2 = 300$ ₺, $t_2 = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$
$A_3 = 500$ ₺, $t_3 = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$
olacağından,

$$t = \frac{200 \cdot \frac{1}{6} + 300 \cdot \frac{1}{4} + 500 \cdot \frac{1}{3}}{200+300+500} = \frac{275}{1000} = 0{,}275 \text{ yıl}$$

$$0{,}275 \cdot 360 = 99 \text{ gün}$$

elde edilir.

Örnek: 300 ₺ 60 gün
400 ₺ 90 gün
270 ₺ 40 gün
süreli faize bırakılmış ise bu sermayelerin toplamı için ortalama vade nedir?

Çözüm: $A_1 = 300$ ₺, $t_1 = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$
$A_2 = 400$ ₺, $t_2 = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$
$A_3 = 270$ ₺, $t_3 = \frac{40}{360} = \frac{1}{9}$
olacağından,

$$t = \frac{300 \cdot \frac{1}{6} + 400 \cdot \frac{1}{4} + 270 \cdot \frac{1}{9}}{300+400+270} = \frac{185}{1000} = 0{,}185 \text{ yıl}$$

$$0{,}185 \cdot 360 = 67 \text{ gün}$$

yapar.

BİLEŞİK FAİZ

1.5. Tanım: Bir sermayeye uygulanan faizin dönem sonunda ulaşan baliğe tekrar ikinci defa basit faiz uygulanır. İkinci dönemin sonunda oluşan bir baliğe üçüncü defa basit faiz uygulanır. Bu işlem n defa devam eder. n defa devam eden bu faizlendirme işlemene bileşik faiz denir. Bileşik faiz yıl üzerinden değerlendirilir. 1 yıldan kısa süreler için yapılan işlemlerde süre ve faiz miktarları 1 yıl üzerine çevrilir. 1 yıldan fazla olan süreler de yıl üzerine çevrilerek yapılır.

Örnek: 1 000 ₺ ye yıllık % 20 oranında basit ve birleşik faiz uygulanıyor. 5 yılsonunda baliğleri bulunuz.

Basit faiz işlemine göre,

Süre	Sermaye	Faiz Tutarı	Baliğ
1. yıl	1 000	200	1 200
2. yıl	1 000	200	1 400
3. yıl	1 000	200	1 600
4. yıl	1 000	200	1 800
5. yıl	1 000	200	2000

Bileşik faiz işlemine göre,

Süre	Sermaye	Faiz Tutarı	Baliğ
1. yıl	1 000	200	1 200
2. yıl	1 200	240	1 440
3. yıl	1 440	288	1 728
4. yıl	1 728	345,60	2 073,60
5. yıl	2 073,60	414,72	2 488,32

elde ediliyor. Burada görülüyor ki, bileşik faiz verenler için daha fazla getiri sağlamaktadır. Basit faiz ise faiz alan için daha kârlıdır. //

1.4. Teorem: Sermaye (anapara) (A), faiz oranı (n), zaman (t) ve faiz tutarı (F) ile gösterilmek üzere, bileşik faiz

$$B_f = A(1+n)^t$$

şeklindedir.

İspat: Bir bileşik faiz,

1. dönemin sonunda faiz olarak $B_f = A(1+n)$

2. dönemin sonunda faiz olarak $B_f = A(1+n)(1+n) = A(1+n)^2$

3. dönemin sonunda faiz olarak $B_f = A(1+n)^2(1+n) = A(1+n)^3$

...

n. dönemin sonunda faiz olarak $B_f = A(1+n)^{n-1}(1+n) = A(1+n)^n$

şeklindedir.

Örnek: Bir X şahsı bankadan aldığı 1 000 ₺ kredi kartı borcu bulunmaktadır. Banka ödenmeyen kredi kartları için aylık %3 faiz uygulamaktadır. Bu X şahsı kredi kartına 6 ay ödememiştir. 6 ay sonra borcu kaç lira olacaktır?

Çözüm: A = 1 000 ₺, aylık %3 olduğundan yıllık % 36 olur, buna göre $n = 0{,}36$, $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ dir.

$$B_f = 1\,000(1 + 0{,}36)^{1/2} = 1\,000\sqrt{1{,}36} = 1\,000 \cdot 1{,}16619 = 1\,116{,}19 \text{ ₺}$$

Örnek: 5 000 ₺ bir bankadan 18 aylığına aylık %3 bileşik faizden kredi olarak alınmak istenmiştir. Bu bankadan alınacak krediye aylık kaç lira olarak ödenecektir.

Çözüm: A = 5 000 ₺, aylık %3 ise yıllık %36, $n = 0{,}36$, $t = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ olduğundan,

$$B_f = 5\,000(1 + 0{,}36)^{3/2} = 5\,000\sqrt{(1{,}36)^3} = 5\,000 \cdot 1{,}586 = 7\,930{,}09 \text{ ₺}$$

elde edilir. Bu miktar 9 555 ₺ ödeneceğinden 18 takside bölünürse,

$$\frac{7930}{18} = 440{,}55 \text{ ₺}$$

olur.

Örnek: 3 400 ₺ nin bileşik faizle 2 yıllığına kredi olarak 4 896 ₺ olarak alınıyor. Bu krediye uygulanan yıllık faiz oranı nedir?

Çözüm: A = 3 400 ₺, t = 2 yıl, $B_f = 4896$ ₺ ise

$$B_f = A(1 + n)^t$$
$$4\,896 = 3\,400(1 + n)^2$$
$$\frac{4\,896}{3\,400} = (1 + n)^2$$
$$1{,}44 = (1 + n)^2$$
$$\sqrt{1{,}44} = \sqrt{(1 + n)^2}$$
$$1{,}2 = 1 + n$$
$$n = 0{,}2 = \frac{20}{100}$$

olacağından % 20 olduğu tespit edilir.

Örnek: 10 000 ₺ nin 2 yılda getireceği bileşik faizin baliği 15 625 ise yıllık faiz oranını bulunuz.

Çözüm: $A = 10\ 000$ ₺, $t = 2$ yıl, $B_f = 15\ 625$ ₺ ise

$$B_f = A(1+n)^t$$
$$15\ 625 = 10\ 000(1+n)^2$$
$$\frac{15\ 625}{10\ 000} = (1+n)^2$$
$$1{,}5625 = (1+n)^2$$
$$\sqrt{1{,}5625} = \sqrt{(1+n)^2}$$
$$1{,}25 = 1+n$$
$$n = 0{,}25$$

Bu da % 25 olduğunu gösterir.

Örnek: Yıllık %40 bileşik faiz oranı ile faize yatırılan 5 000 ₺ nin kaç yıl sonra 15 000 ₺ ye ulaşır.

Çözüm: B_F bileşik faiz, A anapara, n faiz oranı, t faizin vadesi olmak üzere bileşik faiz;

$$B_F = A(1+n)^t$$

olduğu bilinmektedir. $n = 0{,}40$, $A = 5\ 000$ ₺ , $B_F = 15\ 000$ ₺ olduğuna göre

$$15\ 000 = 5\ 000(1+0{,}4)^t$$
$$3 = 1{,}4^t$$
$$\log 3 = \log 1{,}4^t$$
$$\log 3 = t \cdot \log 1{,}4$$
$$t = \frac{\log 3}{\log 1{,}4} = \frac{0{,}477}{0{,}146} = 3{,}265 \text{ yıl}$$

bulunur. Burada 0,265'i 360 ile çarparsak, 95 gün olarak buluruz. Buna göre,

3 yıl 3 ay 5 gün

faizde kalmalıdır.

BİLEŞİK REEL FAİZ

1.6. Tanım: Bileşik faizin bileşik enflasyondan çıkarılmasından oluşan faiz miktarına bileşik reel faiz denir. F_b ile gösterilir.

1.5. Teorem: Sermaye (anapara) (A), faiz oranı (n), zaman (t), enflasyon oranı (m) ile gösterilmek üzere bileşik reel faiz,

$$F_b = A[(1+n)^t - (1+m)^t]$$

biçimindedir.

İspat okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: Yıllık %10 enflasyonun olduğu bir dönemde yıllık %15 faiz veren bir bankaya bileşik faizle 3000 ₺ yatıran bir şahıs 6 ay sonundaki reel faiz miktarını bulunuz.

Çözüm: $A = 3\,000$ ₺, $n = \frac{15}{100}$, $m = \frac{10}{100}$, $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} F_b &= A[(1+n)^t - (1+m)^t] \\ &= 3\,000\left[\left(1+\frac{15}{100}\right)^t - \left(1+\frac{10}{100}\right)^t\right] \\ &= 70{,}72 \text{ ₺} \end{aligned}$$

Örnek: Yıllık %15 enflasyonun olduğu bir dönemde bir bankaya bileşik faizle 3 yıllığına yatırılan 4 000 ₺ ye 825,50 ₺ reel faiz olması için yıllık faiz oranı ne olmalıdır.

Çözüm: $A = 4\,000$ ₺, $F_b = 826{,}50$ ₺, $m = \frac{15}{100}$

$$\begin{aligned} &F_b = A[(1+n)^t - (1+m)^t] \\ &825{,}50 = 4\,000\left[(1+n)^3 - \left(1+\frac{15}{100}\right)^3\right] \\ &\frac{825{,}50}{4\,000} = (1+n)^3 - 1{,}15^3 \\ &0{,}206375 = (1+n)^3 - 1{,}520875 \\ &0{,}206375 + 1{,}520875 = (1+n)^3 \\ &1{,}72725 = (1+n)^3 \\ &\sqrt[3]{1{,}72725} = \sqrt[3]{(1+n)^3} \\ &1{,}1998 = 1+n \\ &n = 0{,}1998 \end{aligned}$$

Şu halde % 20 faiz uygulanmıştır.

NOMİNAL FAİZ (DÖNEMSEL FAİZ)

1.7. Tanım: Bileşik faizde bir takvim yılı birden fazla faizlendirme devrelerine ayrılabilir. Ayrılan bu devreleri yıl üzerinden işlem yapmaya nominal faiz denir. B_n ile gösterilir. Mesela faizlendirme üç aylık süreler için uygulanırsa ve üç aylık devreler için faiz oranı %6 ise yıllık faiz oranı 4 kat artacağından %24 dür. Elde edilen bu %24'e nominal faiz oranı denir.

Faiz dönem sayısı j ve dönemlik faiz oranı n_n ile gösterirsek,

$$B_n = A(1 + n_n)^j$$

olarak bulunur.

Örnek: Üç aylık devreler ile 2 yıllığına yıllık %20 bileşik faiz oranı ile bankaya yatırılan 5 000 ₺ süre sonundaki değerini bulunuz.

Çözüm: Burada devre sayısı 4 olduğundan

$$n_n = \frac{0{,}20}{4} = 0{,}05,\ j = 4 \cdot 2 = 8 \text{ dönem},\ A = 5\,000 \text{ ₺}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} B_n &= A(1 + n_n)^j \\ &= 5\,000(1 + 0{,}05)^8 \\ &= 7\,387{,}28 \text{ ₺} \end{aligned}$$

dir.

Örnek: 4 000 ₺, 4 aylık faizlendirme devreleri ile 8 yıl faizde kalıyor. İlk 2 yıl için yıllık faiz oranı %24, sonraki 4 yıl için yıllık faiz oranı %30 ve son 2 yıl içinde yıllık faiz oranı %36 dır. Buna göre paranın 8 yıl sonraki baliğini bulunuz.

Çözüm: Devre sayısı $\frac{12}{4} = 3$ dür.

İlk 2 yıl için $A = 4\,000$ ₺ , $j = 3 \cdot 2 = 6$ dönem , $n_n = \frac{0{,}24}{3} = 0{,}08$ faiz

$$B_n = A(1 + n_n)^j$$
$$B_n = 4\,000(1 + 0{,}08)^6 = 6\,347{,}49 \text{ ₺}$$

Sonraki 4 yıl için $A = 6\,347{,}49$ ₺ , $j = 3 \cdot 4 = 12$ dönem, $n_n = \frac{0{,}30}{3} = 0{,}10$ faiz

$$B_n = A(1 + n_n)^j$$
$$B_n = 6\,347{,}49(1 + 0{,}10)^{12} = 19\,921{,}16 \text{ ₺}$$

Sonraki 2 yıl için $A = 19\,921{,}16$, $j = 3 \cdot 2 = 6$ dönem, $n_n = \frac{0{,}36}{3} = 0{,}12$ faiz

$$B_n = A(1 + n_n)^j$$
$$B_n = 19\,921{,}16\,(1 + 0{,}12)^6 = 39\,320{,}85 \text{ ₺}$$

dir.

Örnek: Bir miktar para 3 yıl süreyle yılda %36 faizle 6'şar ay aralıklarla dönemsel faiz uygulanarak 92 203,74 ₺ ye ulaşıyor. Bu paranın esas miktarını bulunuz.

Çözüm: Devre sayısı $\frac{12}{6} = 2$ dir.

$B_n = 92\,203{,}74$ ₺, $n_n = \frac{0{,}36}{6} = 0{,}06$, $j = 3 \cdot 2 = 6$

$$B_n = A(1 + n_n)^j$$
$$92\,203{,}74 = A(1 + 0{,}06)^6$$
$$92\,203{,}74 = A \cdot 1{,}4185$$
$$A = \frac{92\,203{,}74}{1{,}4185} = 65\,000 \text{ ₺}$$

Örnek: 5 600 ₺, 3 ayda bir faizlendirilmek üzere 2 yıl sonra 7666 ₺ olarak alınıyor. Buna göre bu faizlendirmenin faiz oranı nedir?

Çözüm: Devre sayısı $\frac{12}{3} = 4$ dir.

$$A = 5\,600 \text{ ₺},\ B_n = 7\,666 \text{ ₺},\ j = 4 \cdot 2 = 8$$
$$B_n = A(1 + n_n)^j$$
$$7\,666 = 5\,600(1 + n_n)^8$$
$$\frac{7\,666}{5\,600} = (1 + n_n)^8$$
$$\sqrt[8]{(1 + n_n)^8} = \sqrt[8]{1{,}36892857}$$
$$1 + n_n = 1{,}04$$
$$n_n = 0{,}04$$

bir yılda 4 dönem söz konusu olduğundan

$$n = 4 \cdot n_n = 4 \cdot 0{,}04 = 0{,}16$$

bulunur. Şu halde yıllık faiz oranı %16 dır.

Örnek: 3 500 ₺ % 18 faizle 4 ayda bir faizlendirmek üzere bankaya yatırılıyor. Sonuçta 4 169 ₺ olarak geri çekiliyor. Çekilen bu para ne kadar süre bankada kalmıştır?

Çözüm: Devre sayısı $\frac{12}{4} = 3$

$$A = 3\,500 \text{ ₺}, B_n = 4\,169 \text{ ₺}, j = 3n, n_n = \frac{0{,}18}{3} = 0{,}06$$
$$B_n = A(1+n_n)^j$$
$$4\,169 = 3\,500(1+0{,}06)^{3n}$$
$$\frac{4\,169}{3\,500} = 1{,}06^{3n}$$
$$1{,}06^{3n} = 1{,}1911$$
$$\log 1{,}06^{3n} = \log 1{,}1911$$
$$3n \cdot \log 1{,}06 = \log 1{,}1911$$
$$3n = \frac{\log 1{,}1911}{\log 1{,}06} = 3$$
$$n = 1 \text{ yıl}$$

EFEKTİF FAİZ

Faiz hesaplama devrelerin yıl içindeki faizlendirme devresi sıklığı arttıkça, yıllık gerçekleşen faiz oranı nominal faiz oranından büyük olur.

1.8. Tanım: Nominal faiz devre sonunda hesaplandığında yıllık faiz oranından faklı bir faiz oranı verir. Elde edilen bu faiz oranına efektif faiz oranı denir. Mesela üç aylık devreler için faiz oranı %6 ise yıllık faiz oranı nominal olarak %24 olmasına rağmen efektif olarak daha fazla çıkar. Şimdi efektif faiz oranının hesaplanmasını bulalım.

Nominal Faiz Oranı $= n$

Yıllık Dönem sayısı $= j$

ile gösterirsek efektif faiz oranı,

$$n_{efo} = \left(1 + \frac{n}{j}\right)^j - 1$$

şeklindedir. Burada "$\frac{n}{j} = n_n$ Dönem Faiz Oranı" olduğunu unutmayalım.

Örnek: Üç aylık devreler ile yıllık %40 olan bileşik faizi efektif faiz oranına çeviriniz.

Çözüm: Nominal Faiz Oranı $n = 0{,}40$

Yıllık Dönem sayısı $j = 4$

Buna göre

$$n_{efo} = \left(1 + \frac{0{,}40}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}4641$$

olur. O halde efektif faiz oranı $\% \, 46{,}41$ dir.

Örnek: Nominal faiz oranı %30 olduğundan;

a) 6 ayda faizlendirme

b) 3 ayda faizlendirme

c) 1 ayda faizlendirme

d) Günlük faizlendirme ile efektif faiz oranını bulunuz.

Çözüm: Nominal Faiz Oranı $n = 0{,}30$

a) 6 ayda faizlendirme için $j = \frac{12}{6} = 2$ devre olup

$$n_{efo} = \left(1 + \frac{0{,}30}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}3225$$

efektif faiz oranı % 32,25 olur.

b) 3 ayda faizlendirme için $j = \frac{12}{3} = 4$ devre olup

$$n_{efo} = \left(1 + \frac{0{,}30}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}3354$$

efektif faiz oranı %33,54 olur.

c) 1 ayda faizlendirme için $j = \frac{12}{1} = 12$ devre olup

$$n_{efo} = \left(1 + \frac{0{,}30}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}3448$$

efektif faiz oranı %34,48 olur.

d) Günlük faizlendirme için $j = 360$ devre olup

$$n_{efo} = \left(1 + \frac{0{,}30}{360}\right)^{360} - 1 = 0{,}3496$$

efektif faiz oranı %34,96 olur.

Örnek: 25 000 ₺, 5 yılda 6 aylık faizlendirme devreleriyle 18 2000 ₺ yükselmiştir. Uygulanan nominal faiz oranını ve efektif faiz oranını bulunuz.

Çözüm: Burada devre sayısı yılda 2 olduğundan

$j = 10$ devre, $A = 25\,000$ ₺, $B_n = 182\,000$ ₺ ,

bulunur. O halde,

$$B_n = A(1+n_n)^j$$
$$182\,000 = 25\,000(1+n_n)^{10}$$
$$\frac{182\,000}{25\,000} = (1+n_n)^{10}$$
$$7{,}28 = (1+n_n)^{10}$$
$$\sqrt[10]{7{,}28} = \sqrt[10]{(1+n_n)^{10}}$$
$$1+n_n = 1{,}2195$$
$$n_n = 0{,}2195$$

dir. Şu halde,

Nominal faiz oranı $n = 2 \cdot 0{,}2195 = 0{,}439$

olup %43,9 dur. Efektif faiz oranı ise,

$$n_{efo} = \left(1+\frac{n}{j}\right)^j - 1$$
$$n_{efo} = \left(1+\frac{0{,}439}{2}\right)^2 - 1$$
$$n_{efo} = 0{,}4872$$

dir. O halde efektif faiz oranı %48,72 dir.

Örnek: Varsayalım ki A Bankası bize aylık vade ile yıllık %15,4'lik nominal faiz oranı önermektedir. B Bankası ise günlük vade ile yıllık %15,4'lük nominal faiz oranı önermektedir. Bizim için hangi bankanın önerisi daha iyi bir fırsattır?

Çözüm: A Bankası tarafından ödenen efektif yıllık faiz (bir yıl sonra her liranız için kazandığınız miktarı ifade eder)

$$n_{efo} = \left(1+\frac{n}{j}\right)^j - 1 = \left(1+\frac{0{,}154}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}1653 = \%16{,}53$$

Aynı şekilde B Bankasının efektif yıllık faiz ödemesi de şeklinde hesaplanır.

$$n_{efo} = \left(1+\frac{n}{j}\right)^j - 1 = \left(1+\frac{0{,}154}{365}\right)^{365} - 1 = 0{,}1664 = \%16{,}64$$

A ve B Bankalarının bize ödedikleri efektif faiz oranları kıyaslandığında, görülür ki, B Bankası bizim için daha iyi teklif sunmuştur.

BİLEŞİK FAİZ FORMÜLÜNÜN BAŞKA ALANLARA UYGULAMASI

Bileşik faiz formülü "organik büyüme prensibi" gereği farklı alanlarda da kullanılabilir. Bunu örneklerle izah edelim.

Örnek: Bir askeri kurumda sağlık giderleri için yapılan harcamalarda her yıl bir önceki yıla göre %3 arttığı tespit edilmiştir. Bir yıl içerisinde o askeri kurumda yıllık sağlık gideri 1 000 000 ₺ olduğuna göre, 4 yıl sonra bu askeri kurumda sağlık gideri tahmini ne kadar olabilir?

Çözüm: $n = \%3 = 0{,}03$, $t = 4$ yıl $A = 1\,000\,000$ ₺ olduğundan

$$B_f = A(1+n)^t$$
$$B_f = 1\,000\,000(1+0{,}03)^4 = 1\,125\,508{,}81 \text{ ₺}$$

olur.

Örnek: Bir şehrin nüfusu 82 500 dir. Bu şehrin önceki yıllara göre nüfus artışı yıllık %1,1 olduğu tespit edilmiştir. Bu şehrin nüfus artış 10 yıl sonra tahmini ne olabilir?

Çözüm: $n = \%1 = 0{,}011$, $t = 10$ yıl $A = 82\,500$ ₺ olduğundan

$$B_f = A(1+n)^t$$
$$B_f = 82\,500(1+0{,}011)^{10} = 92\,038 \text{ kişi}$$

olur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. Bir kredi kurumunda 100 000 TL, %16 faiz oranıyla yatırılmıştır. Bu paranın;

a) 1 yıldaki faizini
b) 3 aydaki faizini
c) 100 gündeki faizini hesaplayınız.

Çözüm: $A = 100\,000$ ₺ , $n = \%16 = 0{,}16 = \frac{16}{100}$,

a) $t = 1$ yıl olduğundan

$$F = 100\,000 \cdot \frac{16}{100} \cdot 1 = 16\,000 \text{ ₺}$$

b) $t = 3 \text{ ay} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ yıl olduğundan

$$F = 100\,000 \cdot \frac{16}{100} \cdot \frac{1}{4} = 4\,000 \text{ ₺}$$

c) $t = 100 \text{ gün} = \frac{100}{360} = \frac{5}{18}$ yıl olduğundan

$$F = 100\,000 \cdot \frac{16}{100} \cdot \frac{5}{18} = 4\,444{,}44 \text{ ₺}$$

olur.

2. 3 000 ₺ 6 ay sonra bileşik faiz olarak 3 420,52 ₺ ye ulaşmıştır. Ulaşılan bu miktarın yıllık faiz oranını bulunuz.

Çözüm: $A = 3\ 000$ ₺, $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ yıl, $B_f = 3\ 420{,}52$ ₺ ise

$$B_f = A(1+n)^t$$
$$3\ 420{,}52 = 3\ 000(1+n)^{1/2}$$
$$\frac{3\ 420{,}52}{3\ 000} = \sqrt{1+n}$$
$$(1{,}140173)^2 = \sqrt{1+n}^2$$
$$1{,}30 = 1+n$$
$$n = 0{,}30$$

yani, yıllık faiz oranı % 30 dur.

3. Bir bankanın vadeli mevduata uyguladığı faiz oranı %12 dir. Bu bankada 2 000 ₺ hesap açtıran bir kişinin 90 günde elde edeceği pratik faiz getirisi nedir?

Çözüm: $A = 2\ 000$ ₺ , $n = \frac{12}{100}$, $t = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ olacağından

$$F = A \cdot n \cdot t = 2\ 000 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{90}{360} = 60 \text{ ₺}$$

olur.

4. Bir bankanın vadeli mevduata uyguladığı faiz oranı %12 dir. Bu bankada 2000 ₺ hesap açtıran bir kişinin 90 günde elde edeceği tam faiz getirisi nedir?

Çözüm: $A = 2\ 000$ ₺ , $n = \frac{12}{100}$, $t = \frac{90}{365}$ olacağından

$$F = A \cdot n \cdot t = 2\ 000 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{90}{365} = 59{,}17 \text{ ₺}$$

olur.

5. Bir banka, dolar olarak yatırılan paraya % 8 dolar, lira olarak yatırılan paraya %50 ₺ yıllık faiz veriyor. Doların 14,40 ₺ olduğu dönemde 1 000 dolar olan bir kişi parasını bir yıl için dolar olarak yatırılıyor. Bu kişi bir yıl sonra parasını faizi ile birlikte çektiğinde zararlı çıkmaması için doların bir yıl sonraki değerli en az kaç ₺ olmalıdır?

Çözüm: 1 000\$ = 14 400₺

1 000 \$, 1 yıl sonra $n = 0{,}08$

$B_i = A(1 + n \cdot t)$

$B_i = 1\,000(1 + 0{,}08 \cdot 1) = 1080$ \$

olur. 14 400₺, 1 yıl sonra $n = 0{,}50$

$B_i = 14\,400(1 + 0{,}50 \cdot 1) = 21\,600$₺

olurdu. 1080 \$, 21 600₺ olması için,

$$\frac{21\,600}{1\,080} = 20 \text{ ₺}$$

olmalıdır.

6. Ahmet parasının $\frac{1}{3}$ ünü yıllık %10 dan, geri kalanını ise yıllık %15 den 6 aylığına basit faize veriliyor. Eğer tersini yapsaydı, yani; parasının $\frac{1}{3}$ ünü yıllık %15 den, geri kalanını ise yıllık %10 dan 6 aylığına faize verilseydi 1 000 lira daha az faiz alacaktı. Buna göre, Ahmet'in faize verdiği toplam para kaç liradır?

Çözüm:

$$\frac{A}{3}\left(\frac{10}{100} \cdot \frac{6}{12}\right) + \frac{2A}{3}\left(\frac{15}{100} \cdot \frac{6}{12}\right) = \frac{A}{3}\left(\frac{15}{100} \cdot \frac{6}{12}\right) + \frac{2A}{3}\left(\frac{10}{100} \cdot \frac{6}{12}\right) + 1\,000$$

$$\frac{A}{3} \cdot \frac{1}{20} + \frac{2A}{3} \cdot \frac{3}{40} = \frac{A}{3} \cdot \frac{3}{40} + \frac{2A}{3} \cdot \frac{1}{20} + 1\,000$$

$$\frac{A}{60} + \frac{A}{20} = \frac{A}{40} + \frac{A}{30} + 1\,000$$

$$\frac{3A}{120} + \frac{6A}{120} = \frac{3A}{120} + \frac{4A}{120} + 1\,000$$

$$A = 60\,000 \text{ ₺}$$

7. Yıllık %60 basit faiz oranı üzerinden bankaya yatırılan bir miktar para, kaç ay sonra kendisinin $\frac{1}{4}$ü kadar faiz geliri getirir?

Çözüm: $t = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ olduğundan

$$F = A \cdot n \cdot t$$

$$\frac{A}{4} = A \cdot n \cdot \frac{3}{5}$$

$$n = \frac{5}{12}$$

bulunur. Bu 5 ay gerekli olduğunu gösterir.

8. M liranın % x ten 3 yılda getirdiği basit faiz, N liranın % y den 5 yılda getirdiği basit faize eşittir. x ile y arasındaki bağıntı ne olur?

Çözüm: $A \cdot \frac{x}{100} \cdot 3 = A \cdot \frac{y}{100} \cdot 5$

$3x = 5y$

9. Bugün bankaya bileşik faizden yatırılan 7 000 ₺'nin 14 ay sonra bankadan 13 859,52 ₺ olarak çekilmesi için uygulanacak olan aylık faiz oranı ne olmalıdır?

Çözüm: $B_i = A(1 + n)^t$

$$13\,859{,}52 = 7\,000(1 + n)^{14}$$

$$\frac{13\,859{,}52}{7\,000} = 7\,000(1 + n)^{14}$$

$$1{,}979931 = (1 + n)^{14}$$

$$\log 1{,}979931 = \log(1 + n)^{14}$$

$$0{,}29665 = 14 \log(1 + n)$$

$$0{,}021189 = \log(1 + n)$$

$$10^{0{,}021189} = 1 + n$$

$$1{,}05 = 1 + n$$

$$n = 0{,}05$$

aylık faiz oranı %5 elde edilir.

10. Şu anda bankaya bileşik faizden yatırılan 16 000 ₺'nin aylık %1,5 faiz oranı üzerinden yatırıldığı süre sonunda 17 757,52 ₺ olması için bankaya kaç aylığına yatırılması gerekir?

Çözüm: $B_i = A(1 + n)^t$

$$17\,757{,}52 = 16\,000(1 + 0{,}015)^t$$

$$\frac{17\,757{,}52}{16\,000} = (1 + 0{,}015)^t$$

$$1{,}109845 = (1{,}015)^t$$

$$\log 1{,}109845 = \log(1{,}015)^t$$

$$\log 1{,}109845 = t \cdot \log(1{,}015)$$
$$t = \frac{\log 1{,}109845}{\log 1{,}015}$$
$$t = 7 \text{ ay}$$

11. 1 300 ₺ yıllık %12 faiz oranıyla 2 yıl bileşik faiz ile bankaya yatırılmıştır. Bu paranın 2. yılın sonunda ulaşacağı değer kaç ₺'dir?

Çözüm: $B_i = A(1+n)^t$
$$= 1\,300(1+0{,}12)^2$$
$$= 1\,300 \cdot 1{,}12^2$$
$$= 1\,630{,}72 \text{ ₺}$$

12. 10 ay sonra 12 000 ₺ elde edebilmek için aylık %2 faiz oranı ile bileşik faize kaç ₺ yatırılmalıdır?

Çözüm: $B_i = A(1+n)^t$
$$12\,000 = A(1+0{,}02)^6$$
$$12\,000 = A \cdot 1{,}126162$$
$$A = \frac{12\,000}{1{,}126162}$$
$$A = 10\,655{,}65 \text{ ₺}$$

13. Bir şahıs 4 000 ₺'sini yıllık %12 faiz oranı üzerinden 3 ayda bir faizlendirerek 3 yıllığına bir bankaya yatırıyor. Buna göre 3 yılın sonunda bu şahsın eline geçen toplam para kaç ₺ olur?

Çözüm: Yılda $t = \frac{12}{3} = 4$ devre, 3 yılda toplam 12 devre yapar.

Her devrede faiz oranı $t = \frac{0{,}12}{3} = 0{,}04$ olur.

$B_i = 4\,000(1+0{,}04)^{12} = 6\,404{,}12$ ₺

14. Bir mevduat sahibi 10 000 ₺'lik mevduatını 4 yıl vadeli menkul kıymete bağlıyor. Menkul kıymetin faiz ödemeleri 6 ayda bir olduğuna göre yıllık %45 faiz oranından yatırımın 4 yılın sonundaki değeri kaç ₺ olur?

Çözüm: Yılda $t = \frac{12}{6} = 2$ devre, 4 yılda toplam 8 devre yapar.

Her devrede faiz oranı $t = \frac{0,45}{2} = 0,225$ olur.

$B_i = 10\,000(1 + 0,225)^8 = 50\,709,43$ ₺

15. 4 yıllık mevduatın faiz oranı %22 olduğuna göre 4 aylık mevduata verilen yıllık efektif faiz oranı ne olur?

Çözüm: Nominal Faiz Oranı $n = 0,22$

Yıllık Dönem sayısı $j = 3$

Buna göre

$$n_{efo} = \left(1 + \frac{n}{j}\right)^j - 1 = \left(1 + \frac{0,22}{3}\right)^3 - 1 = 0,2365$$

olur. O halde efektif faiz oranı %23,65 dir.

16. 4 ayda bir faizlendirilen bir miktar paranın 1 yıl sonra 2 katına çıkması için uygulanacak olan dönemlik (4 aylık) faiz oranı yüzde kaç olmalıdır?

Çözüm: $B_i = A(1 + n)^t$

$2A = A(1 + n)^3$

$\log 2 = \log(1 + n)^3$

$0,30103 = 3\log(1 + n)$

$0,10034 = \log(1 + n)$

$10^{0,10034} = 1 + n$

$1,2599 = 1 + n$

$n = 0,2599 = \%25,99$

17. Yılda bir defa faizlendirmek üzere ilk 5 yıl %18, sonraki 2 yıl %22 faizle bankada kalan bir para 80 000 ₺ olarak geri çekiliyor. 8 yıl önce başlangıçta yatırılan bu para kaç ₺ olarak yatırılmıştır?

Çözüm: $B_i = 80\,000$ ₺, $n_1 = 5, n_2 = 2, t_1 = 0,18, t_2 = 0,22$

$B_i = A(1 + n)^{t_1}(1 + n)^{t_2}$

$80\,000 = A(1 + 0,18)^5(1 + 0,22)^2$

$80\,000 = A(1 + 0,18)^5(1 + 0,22)^2$

$A = 21\,185,56$ ₺

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Nurhan AYDIN, Finans Matematiği, Detay Yayıncılık, Ankara, 2016.

2. Doç. Dr. Zehra BAŞKAYA, Yrd. Doç. Dr. Alper DEĞER, Finans Matematiği, Ekin Kitabevi Yayınları, Bursa, 2012.

3. Turhan KORKMAZ, Mehmet PEKKAYA, Excel Uygulamalı Finans Matematiği, Ekin Basım Yayın Dağıtım, Bursa, 2012.

4. Doç. Dr. İrfan ERTUĞRUL, Temel Matematik, Ekin Basım Yayın Dağıtım, 8. Baskı, Bursa, 2012.

5. Ötüken SENGER, Ticari Matematik, ABP Yayınevi & Matbaacılık, Trabzon, 2006.

6. Doç. Dr. Metin COŞKUN, Yrd. Doç. Dr. Murat ERTUĞRUL, Finans Matematiği, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 2769, Eskişehir, 2013.

7. Doç. Dr. Furkan BAŞER, Ankara Üniversitesi Uygulamalı Bilimler Fakültesi, Finans Matematiği Ders Notları, Ankara, 2021.

8. Prof. Dr. Osman YOZGAT, Finans Matematiği, Marmara Üniversitesi Yayınları: 436, İstanbul, 1986.