7. BÖLÜM
ÇARPANLARA AYIRMA

İlk Cebirsel ifadeler, Türk asıllı Ebu Cafer Muhammed bin Mûsâ el- Harezmi (780 Özbekistan - 850 Bağdat) tarafından yapılmıştır. Şey anlamına gelen bir şekil kullanmıştır. İspanyolcada şey kelimesi x ile ifade edildiğinden daha sonraki yıllarda x kullanılması tercih edilmiştir. Harezmi 1. ve 2. dereceden denklemler tanımlanması ve çözümlerin yapılması üzerine çalışmalar yapmıştır, bu çalışmaları Cebir (Algebra) adlı kitabını yazmıştır.

ÖZDEŞLİKLER

7.1. Tanım: Bir birimde değişkenlerin bütün değerler için sağlanan (doğrulanan) eşitliklere özdeşlik denir.

Örnek:

1. $a^2b + c$ ifadesi a, b ve c'ye bağlı özdeşliktir.
2. $2x + 4y$ ifadesi x ve y'ye bağlı özdeşliktir.
3. $m^2 - n^2$ ifadesi m ve n'ye bağlı özdeşliktir.

ORTAK PARANTEZE ALMA

Bir özdeşliğin her teriminde ortak çarpan varsa, bu ifade çarpma işleminin toplama üzerine dağılma özelliğinden yararlanarak ortak çarpan parantezine alınır. Terimlerin ortak çarpana bölünmesiyle elde edilen terimler parantezi içine alınır. Mesela,

$$A(x)\cdot B(x) \pm A(x)\cdot C(x) = A(x)[B(x) \pm C(x)]$$

gibi…

Örnek:

1. $4m + 6m = m(4 + 6) = 10m$

2. $8x^2 + 4x = 4x(2x + 1)$

3. $a^3 \cdot b^2 + a^2 \cdot b^4 - 5a \cdot b = ab(a^2 \cdot b + a \cdot b^3 - 5)$

4. $6xy^2 + 9x^2y^3 - 3x^2y = 3xy(2y^2 + 3xy^2 - x)$

5. $12m^3n^2 - 8m^2n^2 + 24m^2n^3 = 4m^2n^2(3m - 2 + 6n)$

6. $a^3(a - 4) + 5(a - 4) = (a - 4)(a^2 + 5)$

7.
$$\begin{aligned}(x-1)(a-b) - (1-x)(2a-b) &= (x-1)(a-b) + (x-1)(2a-b)\\ &= (x-1)(a-b+2a-b)\\ &= (x-1)(3a-2b)\end{aligned}$$

3.1. Not: En az dört terimi olan ifadeler ortak çarpan parantezine alınacak biçimde gruplandırılır, sonra ortak çarpan parantezine alınır. Buna gruplayarak ortak paranteze alma adı verilir.

Örnek: $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

Örnek: $ab + a + b + 1 = a(b + 1) + (b + 1) = (b + 1)(a + 1)$

Örnek:
$$\begin{aligned}ak + bk + ck - ah - bh - ch &= k(a + b + c) - h(a + b + c)\\ &= (k + h)(a + b + c)\end{aligned}$$

Örnek:
$$\begin{aligned}(88 \cdot 14 + 88 \cdot 16) - (18 \cdot 30 + 20 \cdot 30) &= 88(14 + 16) - 30(18 + 20)\\ &= 88 \cdot 30 - 30 \cdot 38\\ &= 30(88 - 38)\\ &= 30 \cdot 50\\ &= 1500\end{aligned}$$

Örnek: $a - b + bx - ax = a(1 - x) - b(1 - x) = (1 - x)(a - b)$

Örnek: $a^2 + bc - ab - ac = a(a-b) - c(a-b) = (a-b)(a-c)$

Örnek: $(p-m)^2(m-n) + (m-n)^2(m-p)$ ifadesinin ortak paranteze alınız.

Çözüm: $(p-m)^2(m-n) + (m-n)^2(m-p)$
$= (p-m)(m-n)(m-n-m+p)$
$= (p-m)(m-n)(p-n)$

Örnek: $mx^2 - nx^2 + ny + 3y - 3x^2 - my$ ifadesinin ortak paranteze alınız.

Çözüm: $mx^2 - nx^2 + ny + 3y - 3x^2 - my$
$= x^2(m-n-3) + y(n+3-m)$
$= (x^2+y)(m-n-3)$

Örnek: $m^2 - n^3 - mn + mn^2$ ifadesinin ortak paranteze alınız.

Çözüm: $m^2 - n^3 - mn + mn^2 = m(m-n) + n^2(m-n)$
$= (m-n)(m+n^2)$

Örnek: $a(b^2+1) - b(a^2+1)$ ifadesinin ortak paranteze alınız.

Çözüm: $a(b^2+1) - b(a^2+1) = ab^2 + a - ba^2 - b$
$= ab(b-a) + (a-b)$
$= (b-a)(ab-1)$

Örnek: $\dfrac{a^2b - ab^2}{a-b}$ denkleminin en sade hali nedir?

Çözüm: $\dfrac{a^2b - ab^2}{a-b} = \dfrac{ab(a-b)}{(a-b)} = ab$

TOPLAM ve FARK ÖZDEŞLİKLERİ

a. İki Kare Farkı

7.1. Teorem: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

İspat: $(x-y)(x+y)$ ifadesinin dağılma özelliğini yaparsak,

$$(x-y)(x+y) = x^2 + xy - yx + y^2 = x^2 - y^2$$

olarak bulunur.

Örnek:

1. $23^2 - 13^2 = (23-13)(23+13) = 10 \cdot 36 = 360$

2. $m^2 - 1 = m^2 - 1^2 = (m-1)(m+1)$

3. $9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a-4b)(3a+4b)$

4. $3a^2 - 12b^2 = 3(a^2 - (2b)^2) = 3(a-2b)(a+2b)$

5. $(5a-2b)^2 - 4(a-2b)^2$

$= [(5a-2b) - 2(a-2b)][(5a-2b) + 2(a-2b)]$

$= [5a - 2b - 2a + 4b][5a - 2b + 2a - 4b]$

$= (3a+2b)(7a-6b)$

Örnek: $\dfrac{1005^2-995^2}{101^2-99^2}$ nın en sonucu nedir?

Çözüm:

$$\frac{1005^2-995^2}{101^2-99^2} = \frac{(1005-995)(1005+995)}{(101-99)(101+99)} = \frac{10 \cdot 2\,000}{2 \cdot 200} = 50$$

Örnek: $8n = 112^2 - 104^2$ ise n'nin değeri nedir?

Çözüm: $8n = 112^2 - 104^2$

$8n = (112-104)(112+104)$

$8n = 8 \cdot 216$
$n = 216$

Örnek: $x^2 - 2y^2 + z^2$ ifadesinin $x - y = y - z = 4$ için değer nedir?

Çözüm: $x - y = 4$ ve $y - z = 4$ olduğundan $z - y = -4$ dür. Ayrıca $y = z + 4$ olacağından $x - (z + 4) = 4$ olup $x - z = 8$ olur.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2y^2 + z^2 &= (x^2 - y^2) + (z^2 - y^2) \\
&= (x - y)(x + y) + (z - y)(z + y) \\
&= 4(x + y) - 4(z + y) \\
&= 4(x + y - z - y) \\
&= 4(x - z) \\
&= 4 \cdot 8 \\
&= 32
\end{aligned}
$$

b. İki Küp Farkı ve İki Küp Toplamı

7.2. Teorem:
a) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
b) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

İspat:
a) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ çarpanları dağılma özelliğini yaparsak,

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$$

bulunur.

b) (a) şıkkına benzer şekilde ispat edilir.

Örnek: $a^3 - 8 = a^3 - 2^3 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$

Örnek: $m^3 + 125 = m^3 + 5^3 = (m + 5)(m^2 - 5m + 25)$

Örnek:
$$
\begin{aligned}
x^6 - 8 &= (x^2)^3 - 2^3 \\
&= (x^2 - 2)((x^2)^2 - 2x^2 + 2^3) \\
&= (x^2 - 2)(x^4 - 2x^2 + 8)
\end{aligned}
$$

Örnek: $\dfrac{x^3}{125} - y^3 = \left(\dfrac{x}{5}\right)^3 - y^3 = \left(\dfrac{x}{5} - y\right)$

Örnek: $\dfrac{1}{x^9} - \dfrac{y^3}{27} = \left(\dfrac{1}{x^3}\right)^3 - \left(\dfrac{y}{3}\right)^3$

$$= \left(\frac{1}{x^3} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{1}{x^6} + \frac{y}{3x^3} + \frac{y^2}{9}\right)$$

Sonuç: Toplam ve fark özdeşliklerinin genellemesi sonucu şu şekildedir:

1. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1})$$

2. n tek doğal sayı olmak üzere,

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + y^{n-1})$$

Örnek: $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

Örnek: $a^5 + 32 = a^5 + 2^5$

$$= (a+2)(a^4 - a^3 2 + a^2 2^2 - a 2^3 + 2^4)$$

$$= (a+2)(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a^3 + 16)$$

Örnek: $a^6 - 1 = (a-1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$

Örnek: $243 - x^5 = 3^5 - x^5$

$$= (3-x)(3^4 + 3^3x + 3^2x^2 + 3x^3 + x^4)$$

$$= (3-x)(81 + 27x + 9x^2 + 3x^3 + x^4)$$

3. DERECEDEN FAZLA OLAN KÖKLÜ İFADENİN EŞLENİĞİ

Köklü ifadeleri daha önceden incelemiştik. Burada Rasyonel ifadelerin paydasındaki kök 3. dereceden fazla ise çarpanlara ayırma özdeşliği kullanarak yapılacağını göstereceğiz.

Örnek: $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$ ifadesinin paydasını rasyonel yapınız.

Çözüm:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}=\frac{2\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-1^3}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$$

Örnek: $\frac{5}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$ ifadesinin paydasını rasyonel yapınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\frac{5}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}&=\frac{5}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}\\&=\frac{5}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}\\&=\frac{5(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}\\&=\frac{5(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{3})^3\,(\sqrt[3]{2})^3}\\&=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

3.2. Not: Paydasında $\sqrt[n]{x}\pm\sqrt[m]{y}$ gibi ifade bulunan kesirlerde köklerin derecesi OKEK(n; m)'e genişletilir ve bundan sonra payda rasyonel yapılır.

KUVVET ÖZDEŞLİKLERİ

a. Tam Kare İfadeleri

7.3. Teorem: a) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

b) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

İspat:

a) $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$
$= x(x+y) + y(x+y)$
$= x^2 + xy + yx + y^2$
$= x^2 + 2xy + y^2$

b) (a) şıkkına benzer şekilde ispat edilir.

Örnek:

1. $(x+1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$

2. $(m-2)^2 = m^2 - 2 \cdot m \cdot 2 + 2^2 = m^2 - 4m + 4$

3. $a^4 + 4 + \frac{4}{a^4} = (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot \frac{2}{a^2} + \left(\frac{2}{a^2}\right)^4 = \left(a^2 + \frac{2}{a^2}\right)^2$

Örnek: $a \neq b$, $\frac{(a+b)^2 - 4ab}{a-b}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulalım.

Çözüm: $\frac{(a+b)^2 - 4ab}{a-b} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{a-b}$
$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a-b}$
$= \frac{(a-b)^2}{a-b}$
$= a - b$

Örnek: $\sqrt{64 + \frac{9}{25} + \frac{48}{5}}$ işleminin en sade hali nedir?

Çözüm: $\sqrt{64 + \frac{9}{25} + \frac{48}{5}} = \sqrt{8^2 + 2 \cdot 8 \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2}$
$= \sqrt{\left(8 + \frac{3}{5}\right)^2}$
$= \left(8 + \frac{3}{5}\right)$

Örnek: $a - \frac{1}{a} = 8$ ise $a^2 + \frac{1}{a^2}$ nin değeri nedir?

Çözüm: $a - \frac{1}{a} = 8$ ifadesinin her iki tarafının karesini alalım.

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 8^2$$
$$a^2 - 2a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 64$$
$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 66$$

Örnek: x ve y sayılarının geometrik ortalaması 5, aritmetik ortalaması 6'dır. Buna göre, x^2 ve y^2 sayılarının aritmetik ortalaması kaçtır?

Çözüm: Verilere göre,

$$\frac{x+y}{2} = 6, \sqrt{xy} = 5$$
$$x + y = 12, xy = 25$$

olacağından

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$12^2 = x^2 + 2 \cdot 25 + y^2$$
$$144 - 50 = x^2 + y^2$$
$$\frac{x^2+y^2}{2} = 47$$

olur.

Örnek: $\frac{x^2}{x-3} - \frac{9-6x}{3-x}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x^2}{x-3} - \frac{9-6x}{3-x} = \frac{x^2}{x-3} - \frac{6x-9}{x-3} = \frac{x^2-6x+9}{x-3} = \frac{(x-3)^2}{x-3} = x - 3$$

Örnek: $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^2y^2 + \frac{1}{9}y^4$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^2y^2 + \frac{1}{9}y^4 = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{3}y^2\right) + \left(\frac{1}{3}y^2\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2\right)^2$$

3.3. Not: n bir tam sayı olmak üzere;

$$(x-y)^{2n} = (y-x)^{2n} \text{ ve } (x-y)^{2n-1} = -(y-x)^{2n-1}$$

dir.

7.4. Teorem:

a) $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

b) $(x+y-z)^2 = x^2 + y^2 - z^2 + 2(xy - yz - zx)$

c) $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + x^2 + 2(-xy + yz - zx)$

Önceki teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

Örnek: $(2x - y + 3)^2 = 4x^2 + y^2 + 9 + 2 \cdot (-2xy + 6x - 3y)$

b. Tam Küp İfadeleri

7.5. Teorem:

a) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

b) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Bu teoremin ispatı bir önceki teoremin ispatı gibi ispatı yapılır.

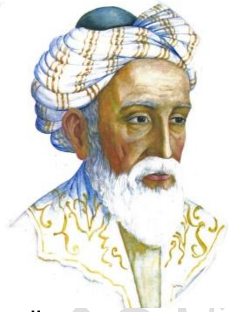
Örnek: $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 - 1^3$
$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Örnek: $a - b = 3$ ve $a^3 - b^3 = 189$ ise $a \cdot b$ nin değerini bulunuz.

Çözüm: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
$3^3 = 189 - 3ab \cdot 3$
$9ab = 189 - 27$
$ab = 18$

c. $(a \pm b)^2$ nin Genel Açılımı (Pascal Üçgeni veya Ömer Hayyam Üçgeni)

Blaise Pascal
(19 Haziran 1623, Ferrand, Fransa - 19 Ağustos 1662, Paris, Fransa)



Ömer Hayyam
(10 Mayıs 1048, Nişabur, İran - 04 Aralık 1131, Nişabur, İran)

n = 0 için……………………………………1
n = 1 için…………………………………1 1
n = 2 için……………………………… 1 2 1
n = 3 için……………………………1 3 3 1
n = 4 için……………………………1 4 6 4 1
n = 5 için…………………………1 5 10 10 5 1

Topal ve fark özdeşliği ile kuvvet özdeşliklerin denklemleri incelenip onların genellemesi alınacak olunursa, aşağıdaki ifadeler ve bu durumdan elde edilen sonuç bulunur.

$(x + y)^n$ açılımı yapılırken, önce a'nın n. kuvvetten başlayarak azalan, b'nin 0 dan başlayarak artan kuvvetlerinin çarpımları yazılıp toplanır.

Sonra n'nin Pascal üçgeninde karşılığı bulunarak katsayılar belirlenir.

$(x + y)^n$ yukarıdaki biçimde yapılır ancak b'nin; çift kuvvetlerinde terimin önüne (+), tek kuvvetlerinde terimin önüne (–) işareti konulur.

Bu durum,

i) $(x+y)^n = 1\cdot x^n y^0 + n\cdot x^{n-1}y^1 + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + 1.x^0y^n$

ii) $(x-y)^n = 1\cdot x^n y^0 - n\cdot x^{n-1}y^1 + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 - \cdots + (-1)^n 1.x^0y^n$
şekline dönüşür.

Örnek: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Örnek: $a + \frac{1}{a} = 2$ olduğuna göre $a^4 + \frac{1}{a^4}$ değerini bulunuz.

Çözüm: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = 2^2$

$$a^2 + 2\cdot a\cdot\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 4$$
$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$$

bulunur. Her iki tarafın bir kez daha karesi alınırsa;

$$\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2 = 2^2$$
$$a^4 + 2\cdot a^2\cdot\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} = 4$$
$$a^4 + \frac{1}{a^4} = 2$$

Örnek: $(1{,}02)^{10}$ ifadesinin, üç ondalık basamağa kadar yaklaşık değeri-ni hesaplayınız.

Çözüm: Paskal üçgeni

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1).(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^2 + \cdots$$

formülünden yararlanalım.

$$(1+0{,}02)^{10} = 1 + 10\cdot 0{,}02 + \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}(0{,}02)^2 + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}(0{,}02)^2 + \cdots$$
$$\cong 1{,}219$$

TOPLAM ve FARK ÖZDEŞLİKLERİ İLE KUVVET ÖZELLİKLERİNİN BİRBİRLERİYLE KULLANILMASI

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x^n \pm y^n$ ifadesi toplam ve fark özdeşliğiyle yapılırken bazen kuvvet özelliğinden de yararlanabilir.

Örnek: $a^6 - 1$ ifadesi,

1. $$\begin{aligned} a^6 - 1 &= (a-1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \\ &= (a-1)(a^4(a+1) + a^2(a+1) + (a+1)) \\ &= (a-1)(a+1)(a^4 + a^2 + 1) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} a^6 - 1 &= (a^3)^2 - 1^2 \\ &= (a^3 - 1)(a^3 + 1) \\ &= (a-1)(a^2 + a + 1)(a+1)(a^2 - a + 1) \\ &= (a-1)(a+1)(a^4 + a^2 + 1) \end{aligned}$$

iki şekilde bulunur.

KOMBİNASYON

Kombinasyon İstatistik derslerinde anlatılacak ayrı bölümdür. Ama kombinasyonun tanımı çarpanlara ayırma başta olmak üzere bazı bölümlerden kullanılacağından, kombinasyonun tanımı bu kısımda verilecektir. Diğer ayrıntılar kombinasyon bölümünde anlatılacaktır.

7.2. Tanım: $n, r \in \mathbb{N}, r \leq n$ olmak üzere,

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ifadesine kombinasyon denir. $C(n;r)$ veya $\binom{n}{r}$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Örnek:

$$C(8;2) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{2!\cdot 6!} = 20$$

$$C(5;2) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = 10$$

Örnek: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=1+5+10+10=26$

Örnek: $6C(n;3)=C(2n;1)$ ise n'nin değeri nedir?

Çözüm: $6\cdot\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{(2n)!}{1!(2n-1)!}$

$$6\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)(n-3)!}{3\cdot2\cdot1\cdot(n-3)!}=\frac{(2n)(2n-1)!}{1!(2n-1)!}$$
$$n(n-1)(n-2)=2n$$
$$n^2-3n=0$$
$$n(n-3)=0$$

olup $n=0, n=3$ olacağından $n=3$ olması ile mümkündür.

7.8. Teorem: $n, r\in\mathbb{N}, r\leq n$ olmak üzere,

$$(x+y)^n=1\cdot x^n y^0+n\cdot x^{n-1}y^1+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+1.x^0y^n$$

olan eşitlik,

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n}.x^0y^n$$

şekline dönüşür. Benzer şekilde,

$$(x-y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0-\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2-\cdots\pm\binom{n}{n}.x^0y^n$$

dir.

İspat: Paskal üçgeninde,

$$(x+y)^n=1\cdot x^n y^0+n\cdot x^{n-1}y^1+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+1.x^0y^n$$

genellemesi yapılır. Bu genellemede;

$$\binom{n}{0}=1, \binom{n}{1}=n, \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}, \cdots, \binom{n}{1}=1$$

olduğundan,

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n}.x^0y^n$$

yazılabilir. //

Benzer şekilde ikinci kısımda gösterilir.

Örnek:

$$(x+y)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4y+\binom{5}{2}x^3y^2+\binom{5}{3}x^2y^3+\binom{5}{4}xy^4+\binom{5}{5}y^5$$
$$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

Örnek:

$$(x-y)^4=\binom{4}{0}x^4-\binom{4}{1}x^3y+\binom{4}{2}x^3y^2-\binom{4}{3}xy^3+\binom{4}{4}y^4$$
$$=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$$

Örnek: $(a+2)^6=$

$$\binom{6}{0}a^6+\binom{6}{1}a^5 2+\binom{6}{2}a^4 2^2+\binom{6}{3}a^3 2^3+\binom{6}{4}a^2 2^4+\binom{6}{5}a2^5+\binom{6}{6}2^6$$
$$=a^6+12a^5+60a^4+160a^3+240a^2+192a+64$$

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Ortak Paranteze Alma

1. $(a-b)(c-d)-d(b-a)+bd-b(d-c)$
ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) ab B) bc C) ac D) cd E) bd

Çözüm: $(a-b)(c-d)-d(b-a)+bd-b(d-c)$
$=(a-b)[(c-d)+d]+b[d-(d-c)]$
$=(a-b)c+bc$
$=c[(a-b)+b]$
$=ac$

Cevap: C

2. $(x-1)(x+8)+(x-1)(x-2)=0$ eşitliğini sağlayan x reel sayılarının büyük olanının değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $(x-1)(x+8)+(4x-1)(x-2)=0$
$(x-1)(x+8+x-2)=0$
$(x-1)(2x-6)=0$
$x-1=0$ ve $2x-6=0$
$x=1$ ve $x=3$

Cevap: D

3. $\frac{m^2n-mn^2}{m-n}$ işleminin sonucu nedir?

A) m B) n C) mn D) 1 E) 2

Çözüm: $\frac{m^2n-mn^2}{m-n} = \frac{mn(m-n)}{(m-n)} = mn$

Cevap: B

4. $\frac{x^2+2xy}{2y^2+xy}$ ifadesinin sadeleştirilmiş şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x}{y}$ B) $-\frac{x}{y}$ C) $\frac{y}{x}$ D) $-\frac{y}{x}$ E) $\frac{x^2}{y}$

Çözüm: $\frac{x^2+2xy}{2y^2+xy} = \frac{x(x+2y)}{y(2y+x)} = \frac{x}{y}$

Cevap: A

5. $a+b=5$ ve $a-c=2$ olduğuna göre; $a^2+ab-bc-ac$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: Ortak paranteze alırsak,

$$\begin{aligned} a^2+ab-bc-ac &= a(a+b)-c(b+a) \\ &= (a+b)(a-c) \\ &= 5\cdot 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Cevap: E

6. $\frac{x^2-xy-x+y}{x-1}+y$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) x B) y C) xy D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\frac{X^2-xy-x+y}{x-1}+y=\frac{x(x-y)-(x-y)}{(x-1)}+y$$
$$=\frac{(x-y)(x-1)}{(x-1)}+y$$
$$=x-y+y$$
$$=x$$

Cevap: A

7. $\frac{4xy-2x-2y^2+y}{2x-y}-2y$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) -1 C) x D) y E) xy

Çözüm:

$$\frac{4xy-2x-2y^2+y}{2x-y}-2y=\frac{4xy-2x-2y^2+y}{2x-y}-2y$$
$$=\frac{2x(2y-1)-y(2y-1)}{2x-y}-2y$$
$$=\frac{(2y-1)(2x-y)}{(2x-y)}-2y$$
$$=2y-1-2y$$
$$=-1$$

Cevap: B

8. $3(x+1)^2, 4(x-1)^3, 6(x-1)$
ifadelerinin en küçük ortak katı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $12(x+1)^2(x-1)$ B) $12(x+1)^2(x-1)^3$
C) $12(x+1)(x-1)^3$ D) $-12(x+1)^2(x-1)^3$
E) $12(x+1)^2(x-1)^2$

Çözüm: Her bir çarpanın en büyük değerleri alırsak,
$OKEK[3(x+1)^2, 4(x-1)^3, 6(x-1)] = 12(x+1)^2(x-1)^3$
buluruz.

Cevap: E

9. $2^{x+y} - 3 \cdot 2^{x-4} - 2^{y+1} + 6 = 0$ ise, 2^{x+y} nin değeri nedir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $2^{x+y} - 3 \cdot 2^{x} - 2^{y+1} + 6 = 0$

$$2^x 2^y - 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^y + 6 = 0$$

dir. Burada $2^x = a$ ve $2^y = b$ alırsak bu denklem;

$$ab - 3a - 2b + 6 = 0$$
$$a(b-3) - 2(b-3) = 0$$
$$(b-3)(a-2) = 0$$
$$a = 2 \text{ ve } b = 3$$
$$2^x = 2 \text{ ve } 2^y = 3$$
$$2^x 2^y = 2 \cdot 3$$
$$2^{x+y} = 6$$

olur.

Cevap: D

10. $\dfrac{x^4 - x^3}{x^4 + x^2} : \dfrac{x^2+1}{x^2-x}$

ifadesinin sadeleştirişmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x-1$ B) x C) 1 D) 2 E) $x+1$

Çözüm: $\dfrac{x^4 - x^3}{x^4 + x^2} : \dfrac{x^2+1}{x^2-x}$

$$= \frac{(x^4-x^3)(x^2+1)}{(x^4+x^2)(x^2-x)}$$
$$= \frac{x^3(x-1)(x^2+1)}{x^2(x^2+1)x(x-1)}$$
$$= 1$$

Cevap: C

11. $\dfrac{ab - bc + ac - c^2}{a^2 - ac + ab - bc}$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{b}{a+b}$ B) $\dfrac{c}{a+b}$ C) $\dfrac{b+c}{a+b}$ D) $\dfrac{b+c}{a+c}$ E) $\dfrac{b+c}{a}$

Çözüm:

$$\frac{ab-bc+ac-c^2}{a^2-ac+ab-bc}=\frac{b(a-c)+c(a-c)}{a(a-c)+b(a-c)}$$
$$=\frac{(a-c)(b+c)}{(a-c)(a+b)}$$
$$=\frac{b+c}{a+b}$$

Cevap: C

12. $x^5-2x^2y=32$ ve $x^3-2y=8$ ise, x'in değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $x^5-2x^2y=32$
$x^2(x^3-2y)=32$
$x^2\cdot 8=32$
$x=2$

Cevap: B

13. a, b ve c asal sayılar olmak üzere, $ab+ac=6a+12$ olduğuna göre, b kaç farklı değer alır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $ab+ac=6a+12$
$a(b+c)=6a\left(1+\frac{2}{a}\right)$
$b+c=6\left(1+\frac{2}{a}\right)$

$a=2$ alınırsa, $b+c=18$ olacağından $b=5, b=7, b=11, b=13$ bulunabilir.

Cevap: D

İki Kare Farkı Özdeşliği

14. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)$ ifadesi sonucu nedir?

A) $\frac{19}{100}$ B) $\frac{19}{81}$ C) $\frac{9}{100}$

D) $-\frac{19}{100}$ E) $-\frac{19}{81}$

Çözüm: İki kare farkından,
$$\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)=\frac{2^2}{3^2}-\frac{2^2}{5^2}=\frac{4}{9}-\frac{4}{25}=\frac{19}{100}$$
bulunur.

Cevap: E

15. $(8x^2-4)^2-(4x^2-8)^2$ ifadesinin çarpanlara ayrılması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $48(x^2-1)^2$ B) $48(x^2-1)$ C) $48(x-1)^2$
D) $-48(x^2-1)^2$ E) $-48(x-1)^2$

Çözüm: İki kare farkını kullanarak,
$$\begin{aligned}(8x^2-4)^2-(4x^2-8)^2 &= (8x^2-4-4x^2+8)(8x^2-4+4x^2-8)\\ &= (4x^2-4)(12x^2-12)\\ &= 4(x^2-1)12(x^2-1)\\ &= 48(x^2-1)^2\end{aligned}$$
bulunur.

Cevap: A

16. $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$ ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2(b+c+a)$ B) $2(b-c-a)$ C) $(b+c-a)$
D) $2(b+c-a)$ E) $-2(b+c-a)$

Çözüm: İki kare farkı uygulanırsa,
$$\begin{aligned}&(a+b+c)^2-(a-b-c)^2\\ &=(a+b+c-(a-b-c))-(a+b+a-b-c)\\ &=(a+b+c-a+b+c)-(a+b+a-b-c)\\ &=2(b+c)-2a\\ &=2(b+c-a)\end{aligned}$$
olur.

Cevap: D

17. $\frac{95^2-65^2}{4x}=8$ olduğuna göre x'in değeri nedir?

A) 150 B) 135 C) 125 D) 105 E) 100

Çözüm: $95^2 - 65^2 = 32x$

$(95 - 65)(95 + 65) = 32x$

$30 \cdot 160 = 32x$

$x = 150$

Cevap: A

18. $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) x B) 4x C) 8x D) 4 E) 8

Çözüm:

$$(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = ((2x + 1) - (2x - 1))((2x + 1) + (2x - 1))$$
$$= 2 \cdot (4x)$$
$$= 8x$$

Cevap: C

19. $\frac{x^2-4}{x-2} - \frac{x^2-9}{x-3}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) x

Çözüm:

$$\frac{x^2-4}{x-2} - \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - \frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$$
$$= (x - 2) - (x - 3)$$
$$= 1$$

Cevap: B

20. $x, y \in \mathbb{N}$ ve $x^2 - y^2 = 13$ olduğuna göre, $x^2 + y^2$ toplamı kaçtır?

A) 56 B) 61 C) 65 D) 81 E) 85

Çözüm: $x^2 - y^2 = 13$

$(x - y)(x + y) = 13$

$x - y = 1$ ve $x + y = 13$

Taraf tarafa toplanırsa, $x = 7$ ve $y = 6$ bulunur.

$x^2 + y^2 = 7^2 + 6^2 = 85$

Cevap: E

21. $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)$ işlemin sonucu kaçtır?

A) $\frac{8}{9}$ B) $\frac{80}{81}$ C) 3 D) 5 E) 9

Çözüm: $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)$

$$= \left(1^2-\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)$$

$$= 1^2-\frac{1}{9^2}$$

$$= \frac{80}{81}$$

Cevap: B

22. $\frac{(3xy^2-6x^2y)(2x+y)}{xy^3-4x^3y}$ ifadesinin kısaltılmış biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) x E) y

Çözüm:

$$\frac{(3xy^2-6x^2y)(2x+y)}{xy^3-4x^3y} = \frac{3xy(y-2x)(2x+y)}{xy(y^2-(2x)^2)}$$

$$= \frac{3xy(y-2x)(2x+y)}{xy(y-2x)(y+2x)}$$

$$= 3$$

Cevap: C

23. $x+y=5,\ x^2-y^2+4x+4y=25$ denklemleri veriliyor, bu denklemlere göre $x-y$ nin değeri nedir?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 1

Çözüm: $x^2 - y^2 + 4x + 4y = 25$
$(x-y)(x+y) + 4(x+y) = 25$
$(x+y)(x-y+4) = 25$
$5(x-y+4) = 25$
$x - y = 1$

Cevap: E

24. $x = y + 1$ olmak üzere $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^3} - y$ ifadesinin en sade hali nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) y E) x

Çözüm: $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^3} - 2y = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x-y)^2} - y$
$= \frac{x+y}{(y+1-y)^2} - y$
$= x$

Cevap: E

25. $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$

A) x B) –x C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$
$= (\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2$
$= (x+1) - (x-1)$
$= 2$

Cevap: E

Toplam ve Fark Özdeşliklerin Diğer Özellikleri

26. $\frac{(x^3+1)(x-3)}{(x^2-2x-3)(x^2-x+1)}$
ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) x

Çözüm: $\dfrac{(x^3+1)(x-3)}{(x^2-2x-3)(x^2-x+1)} = \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)(x-3)}{(x-3)(x+1)(x^2-x+1)} = 1$

Cevap: B

27. $\dfrac{1}{x^2+2x+4} + 1 = x$ olduğuna göre, $x^3 + 2$ ifadesinin değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\dfrac{1}{x^2+2x+4} = x - 1$

$1 = (x-1)(x^2+2x+4)$

$1 = x^3$

$3 = x^3 + 2$

Cevap: C

28. $x = 17^4 - 13^4$ olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisine tam bölünemez?

A) 4 B) 5 C) 12 D) 18 E) 24

Çözüm: $x = 17^4 - 13^4$

$= (17^2 - 13^2)(17^2 + 13^2)$

$= (17-13)(17+13)(17^2+13^2)$

$= 4 \cdot 30 \cdot (17^2 + 13^2)$

$= 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (17^2 + 13^2)$

sayıları 4, 5, 12 ve 24 ile bölünür, ama 18'in bölenleri şartları sağlamaktadır.

Cevap: D

29. $x \neq y$ olmak üzere,

$x^3 - x = y^3 - y$

olduğuna göre, $x^2 + xy + y^2$ nin değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $x^3 - x = y^3 - y$

$x^3 - y^3 = x - y$

$(x-y)(x^2+xy+y^2) = (x-y)$

$x^2 + xy + y^2 = 1$

Cevap: A

30. $x^2 + y^2 = xy$ olduğuna göre, $x^3 + y^3$ nin değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) -3 E) 0

Çözüm: $x^2 + y^2 = xy$ ise $x^2 - xy + y^2 = 0$ dır.

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y) \cdot 0 = 0$$

Cevap: E

31. $x \neq y$ olmak üzere,

$$\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = y - x$$

olduğuna göre, $\frac{x^2+x^2}{xy}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = y - x$

$$\frac{x^3-y^3}{xy} = y - x$$

$$(x^3 - y^3) = (y - x)xy$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = (y - x)xy$$

$$x^2 + y^2 = -2xy$$

$$\frac{x^3-y^3}{xy} = -2$$

Cevap: A

32. $\frac{(x^2-y^2)(x^2-xy+y^2)}{(x^3+y^3)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$

ifadesini sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) xy B) $-xy$ C) $x - y$ D) $x + y$ E) 1

Çözüm:

$$\frac{(x^2-y^2)(x^2-xy+y^2)}{(x^3+y^3)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)} = \frac{(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$$

$$= \frac{x-y}{\left(\frac{y-x}{xy}\right)}$$
$$= \frac{x-y}{1} \cdot \frac{xy}{y-x}$$
$$= -xy$$

Cevap: B

33. $(x-2)^2 - (y-2)^2 = -20$ ve $x^2 - y^2 = 8$ ise $x - y$ nin değeri nedir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: $(x-2)^2 - (y-2)^2 = -20$ ve $x^2 - y^2 = 8$
$(x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 4y + 4) = -20$ ve $x^2 - y^2 = 8$
$8 - 4(x - y) = -20$
$x - y = 7$

Cevap: B

Tam Kare Özdeşliği

34. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
B) $(\sqrt{x} - 9)^2 = x - 18\sqrt{x} + 81$
C) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$
D) $(x - \sqrt{2})^2 = x - 2x + 2$
E) $(m+3)^2 = m^2 + 6m + 9$

Cevap: D

35. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3} + 1)^2$ işleminin sonucu nedir?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 21

Çözüm: $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3} + 1)^2$
$= \sqrt{6}^2 - 2\sqrt{12} + (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} + 1^2$
$= 6 - 4\sqrt{3} + 2 + 12 + 4\sqrt{3} + 1$
$= 21$

Cevap: E

36. $x^2 - y^2 + t^2 - z^2 + 2xt + 2yz$ ifadesinde $x + t = 3$ ve $y - z = 2$ ise sayısal sonuç nedir?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: $x^2 - y^2 + t^2 - z^2 + 2xt + 2yz$
$= (x^2 + 2xt + t^2) - (y^2 - 2yz + z^2)$
$= (x + t)^2 - (y - z)^2$
$= 3^2 - 2^2$
$= 5$

Cevap: C

37. $xy + yz + zx = 20$ ve $x + y + z = 8$ olduğuna göre $x^2 + y^2 + z^2$ ifadesinin değeri nedir?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26

Çözüm: $x + y + z = 8$ denkleminin her iki tarafının karesini alalım.
$(x + y + z)^2 = 8^2$
$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 64$
$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 20 = 64$
$x^2 + y^2 + z^2 = 24$

Cevap: D

38. $x + \frac{1}{x} = \sqrt{8}$ olduğuna göre $x - \frac{1}{x}$ nin değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm: $x + \frac{1}{x} = \sqrt{8}$ denkleminin her iki tarafının karesini alalım.

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \sqrt{8}^2$

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 8$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$

olur. Ayrıca,

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2-2+\frac{1}{x^2} = 6-2=4$$
$$x-\frac{1}{x} = \pm 2$$

bulunur.

Cevap: A

39. $\frac{x^2-6x+9}{9} = \left(\frac{x}{3}+k\right)^2$ olduğuna göre, k aşağıdakilerden hangisidir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $\frac{x^2-6x+9}{9} = \left(\frac{x}{3}+k\right)^2$
$$\frac{(x-3)^2}{3^2} = \left(\frac{x}{3}+k\right)^2$$
$$\sqrt{\frac{(x-3)^2}{3^2}} = \sqrt{\left(\frac{x}{3}+k\right)^2}$$
$$\frac{x-3}{3} = \frac{x}{3}+k$$
$$k=-1$$

Cevap: C

40. $\frac{8x^2-2y^2}{8x^2-8xy+2y^2}$ ifadesinin kısaltılmış biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2xy C) 8xy D) $\frac{x+y}{x-y}$ E) $\frac{2x+y}{2x-y}$

Çözüm: $\frac{8x^2-2y^2}{8x^2-8xy+2y^2} = \frac{2((2x)^2-y^2)}{2((2x)^2-2\cdot 2xy+y^2)}$
$$= \frac{(2x)^2-y^2}{(2x)^2-2\cdot 2xy+y^2}$$
$$= \frac{(2x-y)(2x+y)}{(2x-y)^2}$$
$$= \frac{2x+y}{2x-y}$$

Cevap: E

41. $\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} + 9 = 0$ olduğuna göre, 3x'in değeri nedir?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} + 9 = 0$

$\frac{1-6x+9x^2}{x^2} = 0$

$\frac{(1-3x)^2}{x^2} = 0$

$(1-3x)^2 = 0$

$3x = 1$

Cevap: C

42. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 25 = 0$ denklemi veriliyor. Buna göre, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ nin değeri nedir?

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

Çözüm: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 25 = 0$

$\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5\right]^2 = 0$

$\left(x + \frac{1}{x}\right) = -5$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (-5)^2$

$x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 25$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$

Cevap: C

Diğer Kuvvet Özdeşlikleri

43. $x, y \in \mathbb{Z}^+, x^3 - y^3 = 11$ olduğuna göre, xy nin değeri nedir?

A) -10 B) -1 C) 0 D) 1 E) 10

Çözüm: 11 bir asal sayı olduğuna göre;

$$x^3 - y^3 = 11$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 11$$
$$x - y = 1 \text{ ve } x^2 + xy + y^2 = 11$$
$$(x-y)^2 = 1 \text{ ve } x^2 + xy + y^2 = 11$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = 1 \text{ ve } x^2 + xy + y^2 = 11$$
$$x^2 + y^2 = 1 - 2xy \text{ ve } x^2 + y^2 = 11 - xy$$
$$1 - 2xy = 11 - xy$$
$$-10 = xy$$

Cevap: E

44. $x = 15$ ve $y = 12$ için,

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -27 B) -3 C) 3 D) 27 E) 30

Çözüm:

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3 = (15-12)^3 = 27$$

Cevap: D

45. $\frac{x^3+y^3}{[(x-y)^2+xy](x+y)}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$\frac{x^3+y^3}{[(x-y)^2+xy](x+y)} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x^2-2xy+y^2+xy)(x+y)} = 1$$

Cevap: A

46. $x + y = 3$ ve $xy = 1$ olduğuna göre $x^3 + y^3$ ün değeri nedir?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 21 E) 24

Çözüm: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$3^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3$

$3^3 = x^3 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + y^3$

$x^3 + y^3 = 18$

Cevap: B

47. $xy(x+y) = 5$ ve $(x+y)^3 = 20$ olduğuna göre $x^3 + y^3$ ün değeri nedir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

Çözüm: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$20 = x^3 + 3 \cdot 5 + y^3$

$x^3 + y^3 = 5$

Cevap: C

48. $\dfrac{(x^3y-xy^3)(x+y)}{(x^3y+2x^2y^2+xy^3)(x-y)}$ ifadesinin kısaltılmış biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) x E) y

Çözüm:

$$\frac{(x^3y-xy^3)(x+y)}{(x^3y+2x^2y^2+xy^3)(x-y)} = \frac{xy(x^2-y^2)(x+y)}{xy(x^2+2xy+y^2)(x-y)}$$
$$= \frac{xy(x-y)(x+y)(x+y)}{xy(x+y)^2(x-y)}$$
$$= 1$$

Cevap: A

49. $\dfrac{(3x^3y-18x^2y+37xy)(x+3)}{(3x^2y^2-27y^2)(x-3)}$ ifadesinin sadeleşmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{x+3}{y}$ B) $\dfrac{x-3}{y}$ C) $\dfrac{x}{y+3}$ D) $\dfrac{x}{y-3}$ E) $\dfrac{x}{y}$

Çözüm:

$$\frac{(3x^3y-18x^2y+37xy)(x+3)}{(3x^2y^2-27y^2)(x-3)} = \frac{3xy(x^2-6x+9)(x+3)}{3y^2(x^2-9)(x-3)}$$
$$= \frac{3xy(x-3)^2(x+3)}{3y^2(x-3)(x+3)(x-3)}$$
$$= \frac{x}{y}$$

Cevap: E

50. $x = 3, y = 1$ olduğuna göre,
$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
ifadesinin değeri kaçtır?

A) 512 B) 256 C) 128 D) 64 E) 32

Çözüm:
$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = (x+y)^4 = (3+1)^4 = 256$

Cevap: B

51. $3xy^2 + x^3 = 12$ ve $3x^2y + y^3 = -15$ olduğuna göre, $x + y$ kaçtır?

A) 27 B) 18 C) 9 D) 3 E) 1

Çözüm: $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
$= (3xy^2 + x^3) - (3x^2y + y^3)$
$= 12 - (-15)$
$= 27$

olduğundan $x - y = \sqrt[3]{27} = 3$ bulunur.

Cevap: D

52. $a - b = 4, ab = 18$ ise $a^3 - b^3$ küpleri farkı kaçtır?

A) 64 B) 81 C) 100 D) 121 E) 144

Çözüm: $a - b = 4$
$(a-b)^2 = 16$
$a^2 - 2ab + b^2 = 16$
$a^2 - 2 \cdot 18 + b^2 = 16$
$a^2 + b^2 = 52$

olur. Ayrıca,

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = 4(52 - 16)$$
$$a^3 - b^3 = 144$$

olur.

Cevap: E

53. $(x-6)^4 + 4(x-6)^3 + 6(x-6)^2 + 4(x-6) + 1$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir.

A) $(x-6)^4$ B) $(x-4)^4$ C) $(x+4)^4$ D) $(x-5)^4$ E) $(x+5)^4$

Çözüm:

$$(x-6)^4 + 4(x-6)^3 + 6(x-6)^2 + 4(x-6) + 1 = [(x-6)-1]^4 = (x-5)^4$$

Cevap: D

54. $\dfrac{\mathbf{x+x^{-2}}}{\mathbf{(1-x^{-1}+x^{-2})(x+1)}}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 1 C) –1 D) –2 E) x

Çözüm:

$$\frac{x+x^{-2}}{(1-x^{-1}+x^{-2})(x+1)} = \frac{x+x^{-2}}{(1-x^{-1}+x^{-2})(x+1)} = \frac{x+\frac{1}{x^2}}{(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})(x+1)} = \frac{\frac{x^3+1}{x^2}}{\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)(x+1)} = \frac{x^3+1}{(x^2-x+1)(x+1)} = 1$$

Cevap: B

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. M. Zeki DERMAN, Serdar GÜLMEZ, Ökkeş ÖZKÖSELER, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2002, Ankara.
4. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Matematik Cep Kitabı, Final Dergisi Yayınları, 1989, İstanbul.
7. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.