7. BÖLÜM
TABAN ARİTMETİĞİ

TABAN ARİTMETİĞİNİN TANIMI

Ülkemizde ve Dünya devletlerinin birçoğunda onluk sistem dediğimiz sistem kullanılmaktadır. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} rakamlarından oluşan sayı sistemi tercih edilmektedir. Bu rakamların sayısının bu kadar olması elbette bir kabuldür. Bu kabulün azaltılması veya çoğaltılması işlemine taban aritmetiği denir. Taban aritmetiği, rakamların sayısının 10 tane olmayıp daha fazla veya az olması durumunu inceler. Rakamlar {0, 1, 2, 3, 4} şeklinde olursa beşlik taban sistemi ismi verilir. Veya {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B} gibi 12 adet rakamlardan oluşan yeni sayı yazılabilir. Buna on ikilik taban sistemi denir. Bazı ülkelerin geçmiş tarihlerinde, günümüzde elektronik ve bilgisayar sistemlerinde değişik sayı sistemleri kullanılır. İşte biz burada bu rakam sistemini incelemeye çalışacağız.

7.1. Tanım: n tane $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ birer rakam ve $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n < m$, $(m \in \mathbb{N})$ olmak üzere,

$$A = (a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_m$$

yazımına m tabanında taban aritmetiği denir. Yalnız burada rakamların sıralanışı önemlidir. Sayı sistemine göre sıralanışı diğer bir sayı sisteminde farklı bir rakama karşılık gelir.

Örnek: Beşlik sayı sistemi $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ rakamlarından oluşmaktadır. $(342)_5$, $(12004)_5$, $(40314)_5$ beşlik sayı sisteminde birer sayılardır.

Örnek: On İkilik sayı sistemi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B\}$ rakamlarından oluşmaktadır. $(1A2)_{12}$, $(8203)_{12}$, $(7B62)_{12}$ on ikilik sayı sisteminde birer sayılardır.

Örnek: $(20m4)_7$ sayısında m'nin yerine alabileceği değerler, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ rakamlarından birisidir.

Örnek: $(3548)_5$ tabanında yazılamaz. Çünkü 8 rakamı 5 sayı sisteminde yoktur.

TABAN ARİTMETİĞİNDE SAYI SAYMA

Onluk taban sisteminde rakamlar {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} dan oluşmaktadır. Ve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, … şeklinde sayı sayma yapılmaktadır. Benzer şekilde diğer tabanlarındaki sayı sayma sistemini örneklerle anlamaya çalışalım.

Örnek: Beşlik taban {0, 1, 2, 3, 4} rakamlarından oluşmaktadır. Ve sayı saymak 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 100, 101, 102, 103, 104, 110, 111, 112, 113, 114, 120, 121, 122, 123, 124, 130, 131, 132, 133, 134, 140, 141, 142, 143, 144, 200, … şeklindedir.

Örnek: On ikilik taban {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B} rakamlarından oluşsun. Şu halde, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 2A, 2B, 30, …, 98, 99, 9A, 9B, A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, AA, AB, B0, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8, B9, BA, BB, 100, 101, … biçimindedir.

Örnek: 7 tabanındaki $(256)_7$ sayısının bir fazlası aynı tabanda yazılışı nedir?

Çözüm: 7 tabanında 7 olmayacağından $(260)_7$ olarak bulunur.

7.1. Not: Rakamlar 0 ile 9 arasındadır. Onluk sayı sisteminden fazla sayı sistemine ihtiyaç duyulunca A, B, C, … gibi harflerle gösterilir. Mesela onaltılık sayı sisteminde $A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14$ ve $F = 15$ olarak alınır. //

Taban aritmetiğinde $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ birer rakam n tabanına göre verilen $A = (a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_m$ sayısının sayı çözümlemesi,

$$A = a_{n-1}m^{n-1} \cdots a_2 m^2\ a_1 m\ a_0$$

biçimindedir. Buna göre taban aritmetiğinde

- a_0 nın bulunduğu basamağa $m^0 = 1$ ler basamağı

- a_1 nın bulunduğu basamağa m^1 ler basamağı
- a_2 nın bulunduğu basamağa m^2 ler basamağı
- a_3 nın bulunduğu basamağa $m^3 = 1$ ler basamağı
- ...

denir.

Örnek: $(1025)_6$

- 1 in bulunduğu basamağa $6^3 = 216$ lar basamağı
- 0 in bulunduğu basamağa $6^2 = 36$ lar basamağı
- 2 in bulunduğu basamağa $6^1 = 6$ lar basamağı
- 5 in bulunduğu basamağa $6^0 = 1$ ler basamağı denir.

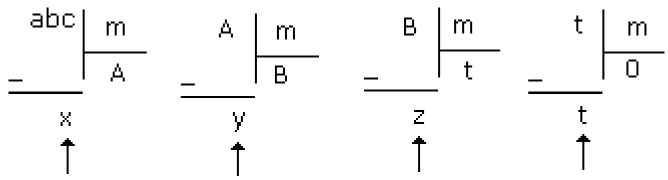
Örnek: $(2456)_8$

- 2 in bulunduğu basamağa $8^3 = 512$ ler basamağı
- 4 in bulunduğu basamağa $8^2 = 64$ ler basamağı
- 5 in bulunduğu basamağa $8^1 = 8$ ler basamağı
- 6 in bulunduğu basamağa $8^0 = 1$ ler basamağı denir.

TABANLAR ARASINDA DÖNÜŞÜM

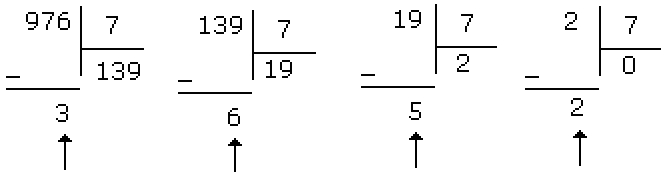
1. Onluk Tabandaki Bir Sayıyı Herhangi Bir Tabana Çevrilmesi: Onluk tabandaki bir sayı diğer tabanlara çevrilmesi istenen taban hangi taban ise, onluk tabandaki sayı o sayıya bölünmelidir. Bölme işlemi, bölümdeki sayı taban sayısından küçük olana kadar yapılmalıdır. Yeni tabandaki sayı, en sondan başlayarak önce bölüm sonra da kalanlar sırasıyla yazılarak elde edilir.

$(abcd)_{10} = (?)_m$



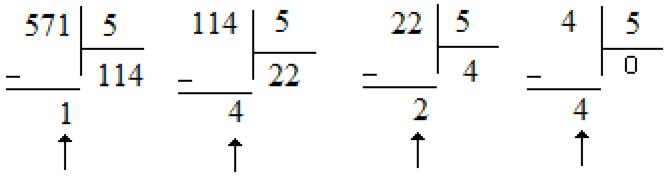
olacağından $(abcd)_{10} = (tzyx)_m$ bulunur.

Örnek: $(976)_{10} = (?)_7$ taban dönüşümü yapalım.



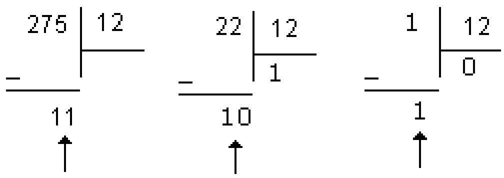
Buna göre, $976 = (2563)_7$ bulunur.

Örnek: $(571)_{10} = (?)_5$ taban dönüşümü yapalım.



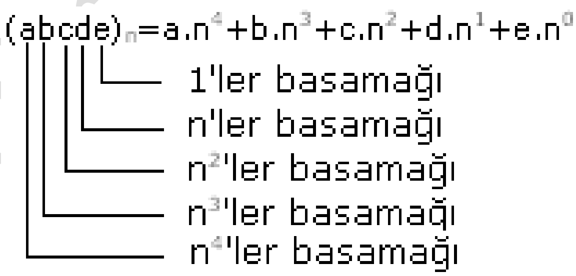
Buna göre, $571 = (4241)_5$ bulunur.

Örnek: $(275)_{10} = (?)_{12}$ taban dönüşümü yapalım.



Burada $A = 10, B = 11$ rakamını gösterirse, $(275)_{10} = (1AB)_{12}$ bulunur.

2. Herhangi Bir Tabandan Onluk Tabana Çevrilmesi: Herhangi bir sayı sisteminden onluk sayı sistemine çevrilmesi için, basamak (hane) çözümlenmesi yapılanmalıdır. n, bir sayı sisteminin tabanını göstermek üzere $n \geq 2$ olacak şekilde bir doğal sayı ise, $(abcde)_n$ sayısı:



Örnek: $(1024)_5 = (?)_{10}$ taban dönüşümünü yapalım.

Çözüm: $(1024)_5 = 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 139$

Örnek: $(563)_8 = (?)_{10}$ taban dönüşümünü yapalım.

Çözüm: $(563)_8 = 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 371$

Örnek: $(12m0)_6 = 312$ ise m'in rakam değeri nedir?

Çözüm: $1 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + x \cdot 6 + 0 \cdot 1 = 312$ ise $x = 4$ bulunur.

Örnek: $(2mn)_8 = 174$ olduğuna göre, m ve n'nin değeri nedir?

Çözüm: $(2mn)_8 = 2 \cdot 8^2 + m \cdot 8^1 + n \cdot 8^0 = 174$ ise $8m + n = 46$ ise $m = 5$ ve $n = 6$ bulunur.

Örnek: $(132)_m = 42$ ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: $1 \cdot m^2 + 3 \cdot m^1 + 2 \cdot m^0 = 42$ ise $m^2 + 3m - 40 = 0$ dır. Bu 2. dereceden denklemdir. Bu denklemi çarpanlara ayırma yöntemiyle çözersek $m = 5$ olur.

Örnek: 5 ve 6 sayı tabanını göstermek üzere,

$$(3n4)_5 = (2n3)_6$$

olduğuna göre, n kaçtır?

Çözüm: $3 \cdot 5^2 + n \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 2 \cdot 6^2 + n \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0$ denklemini çözersek $n = 4$ bulunur.

Örnek: $(102)_m + (145)_m = (251)_m$ ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: Bu denklemi çözümlersek,

$$(1 \cdot m^2 + 0 \cdot m + 2) + (1 \cdot m^2 + 4 \cdot m + 5) = (2 \cdot m^2 + 5 \cdot m + 1)$$
$$m^2 + 2 + m^2 + 4m + 5 = 2m^2 + 5m + 1$$
$$4m + 7 = 5m + 1$$
$$7 - 1 = 5m - 4m$$
$$6 = m$$

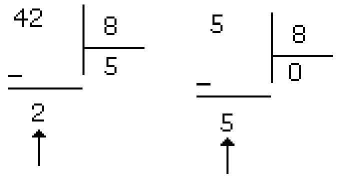
bulunur.

3. Herhangi Bir Tabanı Başka Bir Tabana Çevirme: Verilen sayı önce onluk sayıya çevrilir. Sonra da Onluk tabandaki sayı, istenen tabana dönüştürülür. Yani, n verilen taban ve m istenen taban ise, dönüşümün mantığı şu örnekteki gibidir.

Örnek: $(132)_5 = (?)_8$ taban dönüşümünü yapalım. Önce 5 tabanındaki 132 sayısını 10'luk tabana çevirelim.

$(132)_5 = 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 42$

bulunur. Şimdi de 10'luk tabandan sekizlik tabana çevirelim.



Böylece, $(132)_5 = (52)_8$ olarak bulunur.

TABAN ARİTMETİĞİNDE İŞLEMLER

1. Toplama İşlemi: Taban aritmetiğinde toplama işlemi 10'luk sayı sistemindeki işlem istenen tabanda da yapılır. Burada dikkat edilmesi gereken, belirli tabanda verilen sayıların toplamı istenen tabandan büyük ise, istenen tabana çevrilir. İstenen tabana çevirmek için istenen tabana bölünür. Burada bölüm "elde var" olarak kabul edilir. Kalan ise toplamaya yazılır. Bunu örnekle kavramaya çalışalım.

Örnek: $(452)_8 + (347)_8 = (?)_8$

Çözüm: 1'ler basamağında rakamlar 2 ve 7 olduğundan 10'luk sistemde topladığımızda 9 olur. Bulduğumuz 9 rakamı onluk sayı sistemindedir. Bunu sekizlik sayı sistemine çevirmeliyiz. Öyleyse 9'u 8'e bölersek bölüm 1 kalan 1'dir. Kalan 1 yazılır, bölüm 1 ise elde olarak alınır. 8'ler basamağında 5 ve 4 vardır. Ayrıca 1 elde olduğundan toplamları 10 olur. 10 sayısını onluk tabanda elde ettik, bunu sekizlik tabana çevirmeliyiz, 10'un 8'e bölümünden bölüm kalan 2'dir. Bölüm 2 yazılır ve elde 1 vardır. 8^2 basamağında 4 ve 3 vardır. Elde de 1 olduğundan toplamları 8 olur. 8, sekizlik tabanda olmadığından 8'e bölünür, bölüm 0 kalan 1'dir. Kalan 0 yazılır. 1 ise elde olduğundan başka toplanacak rakam kalmadığından o da yazılır. Yani,

$$\begin{array}{rr} & (452)_8 \\ + & (347)_8 \\ \hline & (1021)_8 \end{array}$$

bulunur.

Örnek: $(233)_4 + (123)_4 = (?)_4$

Çözüm: Yukarıdaki örneğe benzer metotla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{array}{rr} & (233)_4 \\ + & (123)_4 \\ \hline & (1022)_4 \end{array}$$

Örnek: $(4A3)_{12} + (38B)_{12} = (?)_{12}$

Çözüm: Yukarıdaki örneğe benzer metotla bulunur ama burada A = 10, B = 12 olduğunu unutmamak gerekir.

$$\begin{array}{rr} & (4A3)_{12} \\ + & (38B)_{12} \\ \hline & (872)_{12} \end{array}$$

bulunur.

2. Çıkarma İşlemi: Çıkarma işleminde de 10'luk sistemin mantığı buraya çevrilerek yapılır.

Örnek: $(7235)_8 - (367)_8 = (?)_8$

Çözüm: 1'ler basamağında 5'den 7 çıkması gerekir, 5'den 7 çıkmayacağına göre komşu 8'ler basamağına geçeriz. 8'ler basamağında 3 rakamı vardır. Buradan 1 alırsak, 1'ler basamağında 8 olur. Mevcut 5 ile toplandığında 13 olur. $13 - 7 = 6$ bulunur. Şimdi 8'ler basamağına geçelim. 8'ler basamağında 3 vardı. 1 gittiğinden 2 kalır. 2'den 6 çıkmaz. 8^2 basamağında 2 rakamı vardır. Buradan 1 alınırsa 8'ler basamağında 8 olur. Mevcut 2 ile toplandığında 10 olur. $10 - 6 = 4$ bulunur. Sıra 8^2 basamağındadır. 8^2 basamağında 1 kalmıştır ve 1 den yine 3 çıkmaz. Biz de 8^3 basamağında geçeriz. Buradan 1 alırsak 8^2 basamağında 8 olur. Burada bulunan 1 ile toplarsak 9 bulunur. $9 - 3 = 6$ olur. 8^3 basamağında sadece 6 olduğundan aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{array}{r} (7235)_8 \\ -\quad (367)_8 \\ \hline (6646)_8 \end{array}$$

Örnek: $(4A3)_{12} - (38B)_{12} = (?)_{12}$

Çözüm: Yukarıdaki örneğe benzer metotla bulunur ama burada $A = 10, B = 12$ olduğunu unutmamak gerekir.

$$\begin{array}{r} (4A3)_{12} \\ -\quad (38B)_{12} \\ \hline (114)_{12} \end{array}$$

bulunur.

3. Çapma İşlemi: 10'luk tabandaki sistem ile toplama işlemindeki mantık çarpma işleminde de kullanılır.

Örnek: $(235)_6 \times (54)_6 = (?)_6$

Çözüm: Toplama işleminde olduğu gibi onluk sayı sisteminde çarpılıp, sonra istenen sayı sistemine çevirerek çözülür.

$$\begin{array}{r} (235)_6 \\ \times\quad (54)_6 \\ \hline (1432)_6 \\ +\ (2111)_6 \\ \hline (22542)_6 \end{array}$$

TABAN ARİTMETİĞİNDE TEK ve ÇİFT SAYILAR

7.1. Teorem: Taban aritmetiğinde bir sayının tek ve çift olduğu şu şekilde;

i) Taban çift sayı ise sayının tek veya çift olduğunu birler basamağı belirler.

ii) Taban tek sayı ise sayının tek veya çift olduğunu rakamlar toplamı belirler.

İspat: Biz burada ii'yi ispat edelim.

x tabanında $(abc)_x$ sayısını alalım. Bu sayının sayı çözümlemesi yapılırsa,

$$(abc)_x = ax^2 + bx + c$$

elde edilir.

x tek sayı ise x^2 tekdir. Bu durumda a, b ve c sayıları tek ve çift olma durumu sonu belirleyeceğinden $a + b + c$ tek olması $(abc)_x$ sayısının tek olmasını, $a + b + c$ çift olması $(abc)_x$ sayısının çift olmasını gösterir.

Örnek:
$(124)_8$ sayısı taban çift, birler basamağı çift olduğundan sayı çifttir.
$(125)_8$ sayısı taban çift, birler basamağı tek olduğundan sayı tektir.
$(124)_7$ sayısı taban tek, $1 + 2 + 4 = 7$ sayı tek olduğundan sayı tektir.
$(125)_7$ sayısı taban tek, $1 + 2 + 5 = 8$ sayı tek olduğundan sayı çifttir.

Örnek: $(m4)_7$, 7 tabanında iki basamaklı bir tek sayıdır. Buna göre, m'nin kaç farklı değeri vardır?

Çözüm: m sayısı 1'den büyük 7'den küçük doğal sayı olmalıdır. Ayrıca $m + 4$ tek sayı olmalıdır. Buna göre, m'nin alacağı değerler $\{1, 3, 5\}$ rakamlarından biri olmalıdır.

ÖZEL TANIMLI SAYI SİSTEMLERİ

7.3. Tanım: Günümüzde, özellikle teknolojide kullanılan özel isimli sayı sistemleri vardır. Bunlar,

1. İkilik sayı sistemine **Binary** sayı sistemi,
2. Üçlük sayı sistemine **Ternary** sayı sistemi
3. Dörtlük sayı sistemine **Quaternary** sayı sistemi
4. Beşlik sayı sistemine **Quinary** sayı sistemi
5. Altılık sayı sistemine **Senary** sayı sistemi
6. Yedilik sayı sistemine **Septenary** sayı sistemi
7. Sekizlik sayı sistemine **Octal** sayı sistemi,
8. Dokuzluk sayı sistemine **Nonary** sayı sistemi,
9. Onluk sayı sistemine **Decimal** sayı sistemi,

10. On Birlik sayı sistemine **Undecimal** sayı sistemi,
11. On İkilik sayı sistemine **Duodesimal** sayı sistemi,
12. On altılık sayı sistemine **Hexadecimal** sayı sistemi denir.
13. Yirmilik sayı sistemine **Vigecimal** sayı sistemi denir.

İkilik (Binary) sayı sistemine göre,

$(1)_2 = 1$
$(10)_2 = 2$
$(11)_2 = 3$
$(100)_2 = 4$
$(101)_2 = 5$
$(110)_2 = 6$
$(111)_2 = 7$
$(1000)_2 = 8$
$(1001)_2 = 9$
$(1010)_2 = 10 = A$
$(1011)_2 = 11 = B$
$(1100)_2 = 12 = C$
$(1101)_2 = 13 = D$
$(1110)_2 = 14 = E$
$(1111)_2 = 15 = F$

olmak üzere;

1. Binary Sayı Sistemini Octal Sayı Sistemine çevrilmesi

Sayılar virgülden önce ve sonra 3'erli olarak üzere ayrılılar. 3'erli olamayanlar gruplar varsa virgülden öncesinin başına 0 yazılarak, virgülden sonralarına 3'erli olmayanın sonuna 0 ilave edilerek ayrılırlar. Yukarıda verilen ikili sayıların karşılıkları tespit edilerek sırasıyla yazılır.

Örnek: $(100\ 111\ 100\ 110)_2$ sayısını sekizlik sayı sistemine çeviriniz.

Çözüm:

$$\underbrace{100}_{4}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{100}_{4}\ \underbrace{110}_{6}$$

$(100\ 111\ 100\ 110)_2 = (4746)_8$

elde edilir.

Örnek: $(10\ 111\ 100\ 111{,}010\ 111\ 1)_2$ sayısını sekizlik sayı sistemine çeviriniz.

Çözüm:

$$\underbrace{010}_{2}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{100}_{4}\ \underbrace{111}_{7}\quad \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{100}_{4}$$

$(10\ 111\ 100\ 111{,}010\ 111\ 1)_2 = (2747{,}274)_8$
elde edilir.

2. Binary Sayı Sistemini Hexadecimal Sayı Sistemine çevrilmesi

Sayılar virgülden önce ve sonra 4 erli olarak üzere ayrılılar. 4 erli olamayanlar gruplar varsa virgülden öncesinin başına 0 yazılarak, virgülden sonralarına 4 erli olmayanın sonuna 0 ilave edilerek ayrılırlar. Yukarıda verilen ikili sayıların karşılıkları tespit edilerek sırasıyla yazılır.

Örnek: $(10\ 111\ 100\ 111{,}010\ 111\ 1)_2$ sayısını sekizlik sayı sistemine çeviriniz.

Çözüm:

$$\underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{1110}_{E}\ \underbrace{0111}_{7}\quad \underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{1110}_{E}$$

$(10\ 111\ 100\ 111{,}010\ 111\ 1)_2 = (5E7{,}5E)_{16}$
elde edilir.

Örnek: $(10\ 011\ 110\ 011{,}101\ 011\ 1)_2$ sayısını onaltılık sayı sistemine çeviriniz.

Çözüm:

$$\underbrace{0100}_{4}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{0011}_{3}\quad \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{1110}_{E}$$

$(10\ 011\ 110\ 011{,}101\ 011\ 1)_2 = (4F3A{,}AE)_{16}$
elde edilir.

3. Octal Sayı Sistemini Binary Sayı Sistemine Çevrilmesi

Sekizlik sayı sisteminde verilen rakamların öncelikle tek tek ikilik değerleri tespit edilir. Bulunan bu ikilik sayıları sırasıyla yazılır. Burada ilk sayında sonraki sayılar üç basamaktan oluşmuyorsa başına 0 atılarak üç basamağa çıkarılır.

Örnek: $(15)_8$ sayısını ikilik sayı sistemine çeviriniz.

Çözüm: Sekizlik sayı sisteminde $1 = (1)_2$ ve $5 = (101)_2$ olduğuna göre,

$$(15)_8 = (1101)_2$$

olarak bulunur.

Örnek: $(42)_8$ sayısını ikilik sayı sistemine çeviriniz.

Çözüm: Sekizlik sayı sisteminde $4 = (100)_2$ ve $2 = (10)_2 = (010)_2$ olduğuna göre,

$$(42)_8 = (100010)_2$$

olarak bulunur.

4. Hexadecimal Sayı Sistemini Binary Sayı Sistemine çevrilmesi

On altılık sayı sisteminde verilen rakamların öncelikle tek tek ikilik değerleri tespit edilir. Bulunan bu ikilik sayıları sırasıyla yazılır. Burada ilk sayında sonraki sayılar dört basamaktan oluşmuyorsa başına 0 atılarak dört basamağa çıkarılır.

Örnek: $(E89)_{16}$ sayısını ikilik sayı sistemine çeviriniz.

Çözüm: $E = (1110)_2$, $8 = (1000)_2$, $9 = (1001)_2$ olduğundan

$$(E89)_{16} = (111010001001)_2$$

elde edilir.

Örnek: $(D7,A)_{16}$ sayısını ikilik sayı sistemine çeviriniz.

Çözüm: $D = (1101)_2$, $7 = (111)_2 = (0111)_2$, $A = (1010)_2$ olduğundan

$$(D7,A)_{16} = (11010111,101)_2$$

elde edilir.

5. Octal Sayı Sistemini Hexadecimal Sayı Sistemine çevrilmesi

Sekizlik sayı sisteminde verilen rakamların öncelikle tek tek ikilik değerleri tespit edilir. Bulunan bu ikilik sayıları onaltılık sayı sistemine çevrilir.

Örnek: $(425)_8$ sayısını onaltılık sayı sistemine çeviriniz.

Çözüm: $4 = (100)_2$, $2 = (10)_2 = (010)_2$, $5 = (101)_2$ olacağından

$$\underbrace{1}_{1}\ \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{0101}_{5}$$

$(425)_8 = (1000100101)_2 = (115)$

Örnek: $(254{,}6)_8$ sayısını onaltılık sayı sistemine çeviriniz.

Çözüm: $2 = (10)_2 = (010)_2$, $5 = (101)_2$, $4 = (100)_2$, $6 = (110)_2$ olacağından

$$\underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{1100}_{C}\ \underbrace{1100}_{C}$$

$(254{,}6)_8 = (10101100{,}110)_2 = (AC{,}C)$

6. Hexadecimal Sayı Sistemini Octal Sayı Sistemine çevrilmesi

On altılık sayı sisteminde verilen rakamların öncelikle ikilik sayı sistemine çevrilir. Elde edilen ikilik sayı sistemi sekizlik sayı sistemine çevrilir.

Örnek: $(1E{,}73)_{16}$ sayısını sekizlik sayı sistemine çeviriniz.

Çözüm: $E = (1110)_2$, $7 = (0111)_2$, $3 = (0011)_2$ olduğundan
$(1E{,}73)_{16} = (11110{,}01110011)_2$
bulunur. Şimdi 3 erli gruplara ayırarak sekizlik tabana çevirelim.

$$\underbrace{011}_{3}\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{100}_{4}\ \underbrace{110}_{6}$$

$(1E{,}73)_{16} = (36{,}346)_8$
elde edilir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Taban ve Rakam İlişkisi

1. Aşağıdakilerden hangisi, 6 tabanına göre bir rakamdır.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: 6 tabanına göre rakamlar 0, 1, 2, 3, 4, 5'dan oluşur.

2. 12 tabanında iki farklı rakamın toplamı en çok ne olabilir?

Çözüm: $(A)_{12} + (B)_{12}$ işleminin 10 tabanındaki karşılığı $10 + 11 = 21$ dir. 21 sayısının 12 tabandaki karşılığı $(19)_{12}$ olur.

3. Bir sayı tabanında en büyük rakam, en küçük rakamın 15 fazlasına eşittir. Buna göre, bu sayı tabanı kaçtır?

Çözüm: Bir tabanda en küçük rakam 1 ise en büyük rakam onun 15 katı ise bu sayı $F = 15$ olacaktır. Bu ise 16'lık sayı sistemini verir.

4. 6 tabandaki rakamları farklı bir doğal sayı, en çok kaç basamaklı olabilir?

Çözüm: $(102345)_6$ sayısı gibi sayılar yazılır. Yani 6 basamaklıdır.

5. $x - 3$, 5 tabanına göre birer rakamdır. Buna göre, x'in kaç farklı değeri vardır?

Çözüm: 5 tabanına göre, $3 - 3$ ve $4 - 3$ olmak üzere 2 tane yazılabilir.

6. 7 ve n birer sayı tabanı olmak üzere,

$(23n)_6$ ile $(100)_n$

sayıları üç basamaklı birer doğal sayı olduğuna göre, n'nin kaç farklı değeri vardır?

Çözüm: n’nin değeri 2, 3, 4 ve 5 rakamlarını alabilir.

7. 8 ve y birer sayı tabanı olmak üzere,

$(xx)_y + (yy)_8$

toplamı en büyük değerini aldığında, $x + y$ aşağıdakilerden hangisi olur?

Çözüm: En büyük değer olması için $y = 7, x = 6$ alınırsa $x + y = 13$ olur.

8. 12 tabanında $(99)_{12}$ sayısından 5 sonraki sayı nedir?

Çözüm: $(99)_{12} + (5)_{12}$ hesaplanmalıdır. $9 + 5 = 14$ olup bu sayı 12’ye bölündüğünde kalan 2, elde var 1 olur. $9 + 1 = 10 = A$ olacağından

$(99)_{12} + (5)_{12} = (A2)_{12}$

bulunur.

9. 8 tabanındaki $(100)_8$ sayısından 5 önceki sayı nedir?

Çözüm: $(100)_8 - (5)_{12}$ hesaplanmalıdır. 0 sayısından 5 çıkmaz, komşundan 1 alacağız ama o komşuda olmadığından diğer komşuya gitmeliyiz. 1’den 1 alınırsa 8’ler basamağında sayıda 8 olunur. 8’den bir alındığında 8’ler basamağından 7 kalır, 1’ler basamağından 8 olur. 1’ler basamağından $8 - 5 = 3$ olup 8’ler basamağında 7 kaldığından $(73)_8$ sonucu elde edilir.

Taban Aritmetiğinde Tek ve Çift Olma

10. Aşağıda farklı tabanlarda doğal sayılar verilmiştir. Buna göre, verilen sayılardan hangisi çifttir?

A) $(63)_8$ B) $(54)_7$ C) $(A5)_{12}$ D) $(33)_9$ E) $(A0)_{11}$

A) 8 çift tabanında 3 tek olduğundan bu sayı tekdir.
B) 7 tek tabanında 4 çift olduğundan bu sayı tekdir.
C) 12 çift tabanında 5 tek olduğundan bu sayı tekdir.
D) 9 tek tabanında 3 tek olduğundan bu sayı çifttir.
C) 11 tek tabanında 0 çift olduğundan bu sayı tekdir.

11. 7 tabanındaki iki basamaklı $(3x)_7$ sayısı bir tek sayıdır. Buna göre, x'in kaç farklı değeri vardır?

Çözüm: 7 tek sayılı tabanında verilen sayı tek olması için son rakam çift olmalıdır. Şu halde x'in 0, 2, 4 ve6'dan biri olmalıdır.

12. 13 tabanındaki üç basamaklı en küçük tek sayının rakamları toplamı nedir?

Çözüm: 13 tabanındaki üç basamaklı en küçük tek sayı $(100)_7$ olup bu sayının rakamlar toplamı 1'dir.

13. 7 tabanında, birler basmağı 3 olan, iki basamaklı kaç çift sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $(13)_7, (23)_7, (33)_7, (43)_7, (53)_7, (63)_7$, 7 tabanında birler basmağı 3 olan, iki basamaklı 6 tane çift sayı vardır.

Taban Aritmetiğinde Sayı Çözümlemesi

14. x sayı tabanı olmak üzere; dört basamaklı

$$(3245)_x$$

sayısının on tabanına göre çözümlenmiş biçimi nasıldır?

Çözüm: $(3245)_x = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 5$

15. 6 sayı tabanı olmak üzere,

$$(x13)_6 = 117$$

olduğuna göre, x'in değeri nedir?

Çözüm: $(x13)_6 = 117$

$$x6^2 + 1 \cdot 6 + 3 = 117$$

$$x = 3$$

16. 3 ve 4 birer sayı tabanı olmak üzere,

$$(a02)_3 = (11b)_4$$

olduğuna göre, $a - b$ nedir?

Çözüm: $(a02)_3 = (11b)_4$
$$a \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2 = 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + b$$
$$9a + 2 = 20 + b$$
$$9a - b = 18$$
olması için $a = 2, b = 0$ olmalıdır. Şu halde $a - b = 2 - 0 = 2$ dir.

17. m ve m+1 birer sayı tabanı olmak üzere,
$$(61)_{m+1} = (111)_m$$
olduğuna göre, m'nin değeri nedir?

Çözüm: $(61)_{m+1} = (111)_m$
$$6(m + 1) + 1 = 1 \cdot m^2 + 1 \cdot m + 1$$
$$m^2 - 5m - 6 = 0$$
$$m = 6, m = -1$$
olur. $m = 6$ olması doğrudur.

18. m ve m+2 birer sayı tabanı olmak üzere,
$$(130)_m = (mm)_{m+2}$$
olduğuna göre, m'nin değeri nedir?

Çözüm: $(130)_m = (m5)_{m+2}$
$$1 \cdot m^2 + 3 \cdot m + 0 = m \cdot (m + 2) + 5$$
$$m = 5$$

19. 204 sayısının hangi sayı tabanındaki değeri, on tabanına göre 54'e eşittir?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Çözüm: $(204)_m = 54$
$$2 \cdot m^2 + 0 \cdot m + 4 = 54$$
$$2m^2 + 4 = 54$$
$$m = 5$$

20. 4 tabanındaki rakamları farklı üç basamaklı en büyük doğal sayının, on tabanındaki değeri kaçtır?

Çözüm: 4 tabanındaki rakamları farklı üç basamaklı en büyük doğal sayı $(321)_4$ dür. Bu sayının 10 tabanındaki karşılığı

$3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = 57$

olur.

21. n ve 7 birer sayı tabanı olmak üzere,

$(23)_n < (25)_7$

olduğuna göre, n'in en büyük değeri nedir?

Çözüm: $(23)_n < (25)_7$

$2n + 3 < 2 \cdot 7 + 5$

$n < 8$

$n = 8$

22. n bir sayı tabanı olmak üzere,

$(11)_n \cdot (12)_n = 42$

ise n'nin değeri nedir?

Çözüm:

$(11)_n \cdot (12)_n = (1 \cdot n + 1) \cdot (1 \cdot n + 2) = 42$

$n^2 + 3 \cdot n + 2 = 42$

$n = 5$

23. 7 sayı tabanı olmak üzere,

$(xy)_7 + (yx)_7 = 88$

olduğuna göre, x + y nin değeri nedir?

Çözüm: $(xy)_7 + (yx)_7 = 88$

$x \cdot 7 + y + y \cdot 7 + x = 88$

$8x + 8y = 88$

$x + y = 11$

On Tabandan Başka Tabana Çevirme

24. 120 sayısının 4 tabanına göre yazılışı, kaç basamaklı bir doğal sayıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: 120 sayının 4 ile bölümünden bölüm 30 kalan 0'dır.
30 sayının 4 ile bölümünden bölüm 7 kalan 2'dır.
7 sayının 4 ile bölümünden bölüm 1 kalan 3'dır.
1 sayının 4 ile bölümünden bölüm 0 kalan 1'dır.
$120 = (1320)_n$

25. $n > 6$ ve n sayı tabanı olmak üzere,

$$3n^2 + 5n + 2 = (x)_n$$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm: $3n^2 + 5n + 2 = (352)_n$ olup $x = 352$ dir.

26. 8 sayı tabanı olmak üzere, $8^5 = (x)_8$ dır. Buna göre, x'in sondan kaç rakamı sıfırdır?

Çözüm: $8 = (10)_8$ olacağından
$8^5 = (10)_8(10)_8(10)_8(10)_8(10)_8 = (10)_8^5$
olup sayının sondan 5 rakamı sıfırdır.

27. 6 sayı tabanı olmak üzere, $6^4 = (x)_8$ dır. Buna göre, x'in değeri nedir?

Çözüm: $6^2 = 24$ ise $24 = (30)_8$
$(30)_8^2 = (30)_8(30)_8 = (1100)_8$
Çünkü 9 sayısının sekizlik basamağındaki karşılığı 11'dir.

Taban Aritmetiğinde İşlemler

28. 6, sayı tabanını göstermek üzere,

$$(512)_6 - (154)_6$$

farkı, 6 tabanına göre kaçtır?

Çözüm: $(512)_6 - (154)_6 = (314)_6$

29. m sayı tabanını göstermek üzere,

$$(325)_m \cdot (3)_m = (1423)_m$$

olduğuna göre, m'nin değeri nedir?

Çözüm: $(325)_m \cdot (3)_m = (1423)_m$
$(3m^2 + 2m + 5)(3) = 1m^3 + 4m^2 + 2m + 3$
$9m^2 + 6m + 15 = m^3 + 4m^2 + 2m + 3$
$m^3 - 5m^2 - 4m - 12 = 0$
$(m - 6)(m^2 + m + 2) = 0$
$m = 6$
(Bk. Üçüncü dereceden denklemler)

30. 5 tabanındaki $(4!)_5$ sayının sonucu aynı tabanda kaçtır?

Çözüm: $(4!)_6 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 = (40)_6$

31. Beşlik sayı sistemine göre 100 sayısından bir önceki sayı ile 40 sayısının bir önceki sayı çıkarılınca sonuç aynı tabanda ne olur?

Çözüm: Beşlik sayı sistemine göre 100 sayısından önce 44, 40 sayısından önce 34 gelir.
$(44)_6 - (34)_6 = (10)_6$

32. $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$ denklemi kullanarak, ikili sayı sistemindeki $(\underbrace{111 \cdots 1}_{20\text{ tane}})_2$ sayısının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm:
$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{20-1} = \frac{2^{20}-1}{2-1} = 2^{20} - 1$